

DAO ĐỘNG UỐN TỰ DO CỦA DÀM TIMOSCHENKO THIẾT DIỆN KHÔNG ĐỔI FREE VIBRATION OF UNIFORM TIMOSCHENKO BEAMS

ThS. TRẦN NGỌC AN
Bộ môn Cơ học, Trường ĐHHH
ThS. TIẾT VĂN HOÀ
Bộ môn Hình hoạ VKT, Trường ĐHHH

Tóm tắt:

Bài báo trình bày việc tính toán dao động uốn tự do của dầm Timoschenko thiết diện không đổi với các điều kiện biên khác nhau và so sánh kết quả tìm được với dầm Euler - Bernoulli.

Abstract:

This paper presents how to calculate free vibration of uniform Timoschenko beams with different boundary conditions and compares the results with Euler - Bernoulli beams.

1. Đặt vấn đề

Trong các bài toán kỹ thuật, khi tính toán dao động uốn tự do của dầm thiết diện không đổi, ta thường sử dụng mô hình dầm Euler - Bernoulli với phương trình quen thuộc:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Tuy nhiên, các nghiên cứu hiện nay có xu hướng quan tâm đến mô hình dầm Timoschenko do có xét đến ảnh hưởng của momen quán tính quay và biến dạng trượt, hai phương trình đạo hàm riêng mô tả dao động uốn của dầm Timoschenko có dạng:

$$k * GA \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad (2)$$

$$k * GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) - EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (3)$$

A, I - diện tích, momen quán tính thiết diện dầm;

E, G - modul đàn hồi Young, modul trượt Columb;

t, x - thời gian và tọa độ mặt cắt theo trục của dầm;

$w(x, t), \psi(x, t)$ - độ võng của dầm và góc quay của thiết diện dầm;

k^*, ρ - hệ số trượt Timoschenko và mật độ khối lượng.

Hệ hai phương trình (2), (3) đã được Timoschenko đưa ra [1], tuy nhiên chưa có lời giải giải tích một cách tổng quát. Nội dung bài báo này đề cập đến việc giải hệ phương trình vi phân dao động của dầm Timoschenko để tìm phương trình tần số dao động riêng.

2. Các điều kiện biên của dầm Timoschenko

(a) Biên tự do: $M = Q = 0. \quad (4)$

(b) Biên ngàm chặt: $w = \psi = 0. \quad (5)$

(c) Biên bản lề: $w = M = 0. \quad (6)$

(d) Biên ngàm trượt: $Q = \psi = 0. \quad (7)$

Momen uốn M và lực cắt Q được xác định bởi:

$$M = EI \partial \psi / \partial x \quad ; \quad Q = k * GA (\partial w / \partial x + \psi). \quad (8)$$

3. Phương trình đặc trưng của dầm Timoschenko

Nghiệm hệ phương trình (2) và (3) được tìm dưới dạng:

$$w(x, t) = W(x)e^{i\omega t} \quad ; \quad \psi(x, t) = \Psi(x)e^{i\omega t}. \quad (9)$$

Thế biểu thức (9) và khử $e^{i\omega t}$ từ hai phương trình (2) và (3) ta suy ra:

$$k * GA W''(x) + \rho A \omega^2 W(x) + k * GA \Psi'(x) = 0; \quad (10)$$

$$k * GA W'(x) - EI \Psi''(x) + (k * GA - \rho I \omega^2) \Psi(x) = 0. \quad (11)$$

Sử dụng phép đổi biến:

$$y_1(x) = W(x) \quad ; \quad y_2(x) = \Psi(x) \quad ; \quad y_3(x) = W'(x) \quad ; \quad y_4(x) = \Psi'(x). \quad (12)$$

và đưa vào các kí hiệu:

$$e_1 = \frac{\omega^2 \rho}{k * G} \quad ; \quad e_2 = \frac{k * GA}{EI} \quad ; \quad e_3 = \frac{\omega^2 \rho}{E}. \quad (13)$$

Như vậy hệ hai phương trình vi phân cấp hai (10) và (11) đưa được về hệ bốn phương trình vi phân cấp một như sau:

$$\begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \\ y_4'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -e_1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & e_2 - e_3 & e_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Hệ phương trình vi phân (14) có dạng:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}. \quad (15)$$

Phương trình đặc trưng hệ này có dạng:

$$|\mathbf{A} - \gamma \mathbf{E}| = 0. \quad (16)$$

khai triển ta có:

$$\gamma^4 + (e_1 + e_3)\gamma^2 - e_1(e_2 - e_3) = 0. \quad (17)$$

Phương trình (17) là phương trình đặc trưng của dầm Timoschenko.

Giải hệ (15) với tần số thấp $\omega^2 < k * GA / \rho I$ ta tìm được:

$$W(x) = C_1 \sinh \lambda_1 x + C_2 \cosh \lambda_1 x + C_3 \sin \lambda_2 x + C_4 \cos \lambda_2 x; \quad (18)$$

$$\Psi(x) = -\frac{\alpha_1}{\lambda_1} (C_1 \cosh \lambda_1 x + C_2 \sinh \lambda_1 x) + \frac{\alpha_2}{\lambda_2} (C_3 \cos \lambda_2 x - C_4 \sin \lambda_2 x). \quad (19)$$

C_1, C_2, C_3 và C_4 được xác định từ các điều kiện biên.

$$a = \frac{\rho}{E} \left(\frac{A}{I} - \frac{\omega^2 \rho}{k * G} \right) \quad ; \quad b^2 = \frac{\rho}{E} \left(1 + \frac{E}{k * G} \right) \quad ; \quad \lambda_{1,2}^2 = \sqrt{\frac{b^4 \omega^4}{4} + a \omega^2} \mp \frac{b^2 \omega^2}{2}; \quad (20)$$

$$\alpha_1 = \frac{\omega^2 \rho}{k * G} + \lambda_1^2 \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{\omega^2 \rho}{k * G} - \lambda_2^2. \quad (21)$$

4. Phương trình tần số dao động riêng

Từ hệ hai phương trình (18) và (19), kết hợp với các điều kiện biên ta thu được phương trình tần số dao động riêng trong từng trường hợp. Xét với tần số thấp $\omega^2 < k^* GA / \rho I$:

(a) Dầm hai đầu bản lề:

$$\sin \lambda_2 L = 0 \quad (22)$$

(b) Dầm hai đầu tự do:

$$2 + [(\alpha_1 \lambda_1 / \alpha_2 \lambda_2) - (\alpha_2 \lambda_2 / \alpha_1 \lambda_1)] \sinh \lambda_1 L \sin \lambda_2 L - 2 \cosh \lambda_1 L \cos \lambda_2 L = 0 \quad (23)$$

(c) Dầm một đầu ngàm, một đầu tự do:

$$2 + [(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) / \lambda_1 \lambda_2] \sinh \lambda_1 L \sin \lambda_2 L - [(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) / \alpha_1 \alpha_2] \cosh \lambda_1 L \cos \lambda_2 L = 0 \quad (24)$$

(d) Dầm hai đầu ngàm:

$$2 + [(\alpha_2^2 \lambda_1^2 - \alpha_1^2 \lambda_2^2) / \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 \lambda_2] \sinh \lambda_1 L \sin \lambda_2 L - 2 \cosh \lambda_1 L \cos \lambda_2 L = 0 \quad (25)$$

(e) Dầm một đầu ngàm, một đầu bản lề:

$$\alpha_2 \lambda_1 \tanh \lambda_1 L + \alpha_1 \lambda_2 \tan \lambda_2 L = 0 \quad (26)$$

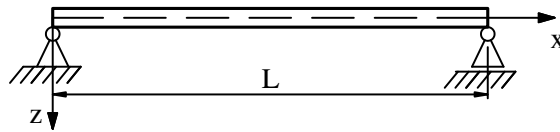
(f) Dầm một đầu ngàm, một đầu ngàm trượt:

$$\alpha_1 \lambda_2 \tanh \lambda_1 L - \alpha_2 \lambda_1 \tan \lambda_2 L = 0 \quad (27)$$

Trong quá trình tính toán, các tác giả đã giải các phương trình phi tuyến trên theo phương pháp đồ thị với sự trợ giúp của phần mềm Maple.

5. Ví dụ tính toán

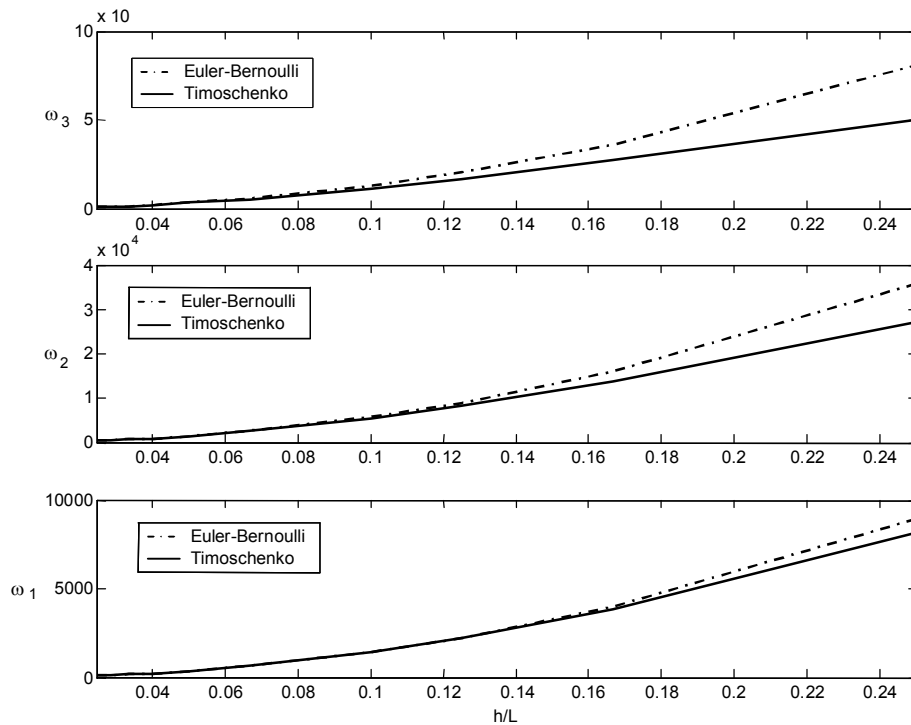
Xét dầm thép có thiết diện hình chữ nhật $b \times h = 0,1 \times 0,1(m^2)$, hai đầu liên kết bản lề, modul đàn hồi $E = 2.10^{11}(N/m^2)$, modul trượt $G = 8.10^{10}(N/m^2)$, khối lượng riêng $\rho = 7850 kg/m^3$, hệ số phân bố trượt $k^* = 5/6$ (Hình 5.1).



Hình 5.1. Dầm hai đầu bản lề

Ba tần số dao động đầu tiên ứng với các giá trị chiều dài L

L(m) =		4	3,5	3	2,5	2
ω_1 (rad/s)	Euler - Bernoulli	90	118	160	230	359
	Timoschenko	90	118	160	230	358
ω_2 (rad/s)	Euler - Bernoulli	359	469	639	920	1438
	Timoschenko	358	467	634	911	1415
ω_3 (rad/s)	Euler - Bernoulli	809	1056	1438	2070	3235
	Timoschenko	802	1044	1415	2023	3123
L(m) =		1,5	1	0,8	0,6	0,4
ω_1 (rad/s)	Euler - Bernoulli	639	1438	2247	3994	8988
	Timoschenko	634	1415	2192	3826	8208
ω_2 (rad/s)	Euler - Bernoulli	2556	5752	8988	15978	35952
	Timoschenko	2485	5414	8208	13768	27177
ω_3 (rad/s)	Euler - Bernoulli	5752	12942	20223	35952	80893
	Timoschenko	5414	11425	16884	27177	50129



Hình 5.2. Đồ thị ba tần số đầu tiên theo tỉ số h/L của dầm hai đầu bản lề

6. Kết luận

Mô hình dầm Euler - Bernoulli do bỏ qua ảnh hưởng của momen quán tính quay và biến dạng trượt nên chỉ cho kết quả phù hợp khi tính các tần số dao động thấp và dầm có tỉ số h/L nhỏ, không đáp ứng được cho các bài toán có yêu cầu dải tần số rộng. Điều đặc biệt, khi tính dao động tự do theo mô hình dầm Timoschenko, nếu kết hợp với tần số cao $\omega^2 > k * GA / \rho I$, ta nhận thấy còn xuất hiện một dải tần số thứ hai - "The second spectrum of Timoschenko beam theory" [3] mà dầm Euler - Bernoulli không phản ánh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO:

- [1]. Nguyễn Văn Ngô, Phạm Huyền, Trần Doãn Tiến (biên dịch - 1963), *Những vấn đề dao động trong kỹ thuật - Timoschenko*, NXB Khoa học Hà nội.
- [2]. Phạm Huy Điền (2002), *Tính toán, lập trình và giảng dạy toán học trên Maple*, NXB Khoa học và Kỹ thuật.
- [3]. N.G. Stephen, *The second spectrum of Timoschenko beam theory - Further assessment*, Journal of Sound and Vibration 292 (2006) 372 - 389.
- [4]. J. Lee, W. W Schultz, *Eigenvalue analysis of Timoschenko beams and axisymmetric Mindlin plates by the pseudospectral method*, Journal of Sound and Vibration 269 (2004) 609 - 621.
- [5]. M. Levinson and D.W. Cooke, *On the two frequency spectra of Timoschenko beams*, Journal of Sound and Vibration (1982) 84(3),319-326.
- [6]. M.A. De Rosa (1994), *Free vibrations of Timoschenko beams on two-parameter elastic foundation*, University of Basilicata, Via della Tecnica 3, Potenza 85100, Italy.

Người phản biện: PGS.TS. Nguyễn Vĩnh Phát