SỰ TƯƠNG TỰ GIỮA VECTOR VÀ TÍN HIỆU
THE LIKELIHOOD BETWEEN VECTOR AND SIGNAL

TS. TRẦN ĐỨC INH
Khoa Điện – Điện tử TB, Trường ĐHHH

Tóm tắt:

Có thể hiểu biết hay ghi nhớ một vấn đề nào đó một cách dễ dàng hơn[1], nếu chúng ta biết liên hệ với những vấn đề đã biết rõ trước đó. Khi nghiên cứu về tín hiệu, tốt nhất chúng ta hãy liên hệ chúng với những hiểu biết về không gian vector. Giữa không gian vector và không gian tín hiệu có rất nhiều điểm tương tự rất thú vị chúng ta sẽ nhận ra trong bài báo này và các bài được đăng trên các số tiếp theo.

Abstract:

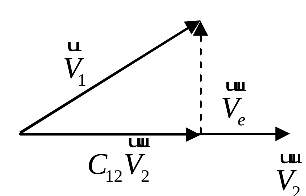
In daily life or in scientific studying, it helf you understand more easily new problem, if you find relation between the new and other problems known well before. During studying signals, there is the better way, when you use the results given by studying space of vectors. This paper gives you satisfaction to recognize likelihood between vectors and signals

A. Không gian vector.

Mỗi vector (tự do) đều được xác định bởi: độ dài, hướng và chiều. Các vector thường được ký hiệu bằng các chữ in hoa có mũi tên ở trên, còn độ dài của chúng chỉ là chữ in hoa đơn, ví dụ: vector $\vec{A}$, có độ dài A. Có rất nhiều vấn đề cần bàn về không gian vector. Trước hết chúng ta hãy xét quan hệ của hai vector $\vec{V_2}$, $\vec{V_1}$ như trong hình vẽ H.1. Ở đây vector $\vec{V_1}$ được biểu diễn bằng một tổng các vector:

$$\vec{V_1} = C_{12}\vec{V_2} + \vec{V_e} \qquad (1)$$

Nếu muốn thay thế vector $\vec{V_1}$, bằng thành phần của nó trên vector $\vec{V_2}$, chúng ta sẽ chịu một sai số $\vec{V_e}$ [2], sai số này sẽ nhỏ nhất, khi nó vuông góc với vector $\vec{V_2}$. Chúng ta cũng thấy rõ, thành phần vector $\vec{V_1}$ trên $\vec{V_2}$ được xác định là: $C_{12}\vec{V_2}$ và về mặt vật lý, thành phần này càng lớn khi hai vector càng giống nhau và giá trị của hệ số $C_{1,2}$ càng gần tới 1, nếu $C_{12} = 0$ thì chúng chẳng có gì liên hệ với nhau cả. Vì vậy $C_{1,2}$ *được gọi là chỉ số tương tự giữa hai vecto*r. $C_{12} = 0$ khi hai vector $\vec{V_1}$ và $\vec{V_2}$ vuông góc với nhau, nghĩa là chúng hoàn toàn không phụ thuộc vào nhau. Chúng ta cũng có thể chứng minh điều nay bằng phương pháp toán học. Trước hết, cần tính tích vô hướng của hai vector:



Hình 2.3 Thành phần của vector này trên một vector khác

$$\langle \vec{V_1}.\vec{V_2} \rangle = V_1.V_2 \cos\theta \qquad (2)$$

Từ đây cho thấy thành phần vector $\vec{V_1}$, trên vector $\vec{V_2}$ được xác định:

$$C_{12}V_2 = V_1 \cos\theta = \frac{\vec{V_1}.\vec{V_2}}{V_2} \qquad (3)$$

Khi đó chỉ số tương tự $C_{1,2}$ được xác định:

$$C_{12} = \frac{\vec{V_1}.\vec{V_2}}{\vec{V_2}.\vec{V_2}} \quad (4)$$

Từ (4) cho thấy chỉ số tương tự chỉ bằng 1 khi hai vector $\vec{V_1}$ và $\vec{V_2}$ trùng nhau, còn nếu $C_{1,2}$=0 hai vector $\vec{V_1}$ và $\vec{V_2}$ sẽ độc lập với nhau, nghĩa là chúng trực giao với nhau.

B. Không gian tín hiệu

Khái niệm về các vector và tính trực giao của chúng có thể mở rộng ra trong không gian tín hiệu. Chúng ta hãy xét hai tín hiệu cho trước $s(t)$, $g(t)$, xác định trong miền (t_1, t_2), và nếu thay thế tín hiệu này bằng tín hiệu kia, nghĩa là:

$$s(t) \approx C_{1,2}.g(t) \quad \text{với } t \subset (t_1, t_2), \quad (5)$$

chắc chắn chúng ta đã phải chấp nhận một sai số nào đấy. Như vậy cần chọn $C_{1,2}$ sao cho cách gán (5) có sai số nhỏ nhất nghĩa là $g(t)$ gần giống với $s(t)$ nhất. Sai số này được xác định:

$$\varepsilon(t) = s(t) - C_{12}g(t) \quad (6)$$

Một trong những tiêu chuẩn tối thiểu hóa sai số (6) là tiêu chuẩn bình phương tối thiểu:

$$\sigma = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \varepsilon^2(t)dt \quad (7)$$

Để tìm giá trị cực tiểu của biểu thức (7), cần tính: $\frac{d\varepsilon}{dC_{12}} = 0$, nghĩa là:

$$\frac{d}{dC_{12}}\left\{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}[\mathrm{s(t)\text{-}C_{12}}g(t)]^2 dt\right\} = 0, \quad (8)$$

sau đó giải phương trình này để tìm giá trị C_{12}. Khai triển và giải phương trình bậc một (8) chúng ta có:

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} s(t).g(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} g^2(t)dt} \quad (9)$$

Tương tự như đối với vector, chúng ta có thể nói tín hiệu $s(t)$ có chứa thành phần của $g(t)$ là $C_{1,2}.g(t)$, nếu $C_{1,2}$=1 thì hai tín hiệu này hoàn toàn giống nhau ngược lại nếu $C_{1,2}$=0 thì hai tín hệu nay hoàn toàn không phụ thuộc vào nhau. Biểu thức (9) cho thấy chỉ số tương tự sẽ bằng không khi tử số của biểu thức này bằng 0. Nói cách khác hai tín hiệu $s(t)$ và $g(t)$ sẽ hoàn toàn độc lập với nhau khi:

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t).g(t)dt = 0 \quad (10)$$

Đến đây chúng ta thấy một sự tương tự rất rõ giữa hai chỉ số (4) dành cho vector với (9) dành cho tín hiệu. Và nếu chỉ số (4) nhận giá tri 0, thì hai vector $\vec{V_1}$ và $\vec{V_2}$ được gọi là trực giao với nhau. Vậy nếu (9) mà bằng 0, nghĩa là (10) bằng 0, thì hai tín hiệu bất kỳ $s(t)$ và $g(t)$ cũng có thể được gọi là *trực giao với nhau.*

Mở rộng ra không gian n chiều, nếu $\left\{\vec{V}\right\} = \left\{\vec{V_1}, \vec{V_1}, ...\vec{V_i}, ..., \vec{V_n}\right\}$ là một không gian các vector trực giao tương hỗ, thì:

$$\langle \vec{V_i}.\vec{V_j} \rangle = \begin{cases} 0 - khi: i \neq j \\ K \neq 0 - khi: i = j \end{cases} \qquad (11)$$

Không gian này được gọi là kín hay đầy nếu không tồn tại một chỉ số $k \neq i \neq j$ nào đó có thể thỏa mãn điều kiện (11).

Tương tự như vậy, nếu $\left\{g_n(t)\right\} = \left\{g_1(t), g_2(t), ..., g_i(t), ..., g_n(t)\right\}$ là một không gian các tín hiệu trực giao tương hỗ, thi:

$$\langle g_i(t).g_j(t) \rangle = \begin{cases} 0 - khi: i \neq j \\ K \neq 0 - khi: i = j \end{cases} \qquad (12)$$

Và Không gian này được gọi là kín hay đầy nếu không tồn tại một chỉ số $k \neq i \neq j$ nào đó có thể thỏa mãn điều kiện (12). Các tập tín hiệu điều hòa $\left\{sin(n\omega_0 t), cos(n\omega_0 t)\right\}$ và các hàm mũ $\left\{e^{jn\omega_0 t}\right\}$ là các tập tín hiệu trực giao tương hỗ và kín.

Kỳ sau:" Ứng dụng của các lớp tín hiệu trực giao"

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. T.S. Trần Đức Inh. Tập bài giảng *"Cơ sở lý thuyết truyền tin".*

[2]. B.P. Lathi *"Các hệ thống viễn thông. 1992.* Associate Professor of Electrical Engineering. Bradley University.

Người phản biện: TS. Lê Quốc Vượng