Nhìn trên tổ chức tế vi khi hóa già ở 350^0C ở độ phóng đại thấp (hình 5a) chỉ thấy dung dịch rắn đồng đều trên toàn bộ tiết diện. Tuy nhiên khi ở độ phóng đại cao hơn (hình 5b) có thấy xuất hiện những chấm đen nhỏ mịn, tập trung ở biên giới hạt được xem là pha lạ. Điều này có thể giải thích quá trình tăng bền ở đây diễn ra theo hai cơ chế phân rã spinodal và cơ chế sinh mầm phát triển mầm. Dựa vào giản đồ pha có thể nghiên cứu về cơ chế phân rã spinodal diễn ra mạnh hơn so với cơ chế sinh mầm và phát triển mầm.

Tuy nhiên để kiểm chứng chặt chẽ các điều nhận định trên cần phải làm thí nghiệm trên những thiết bị hiện đại hơn.

4. Kết luận

Sau khi đúc được khử khí bằng Mg đã thấy xuất hiện ít các vết rỗ hơn so với không khử khí.

Sau khi xử lý bằng tôi và hóa già, độ cứng đã tăng lên đáng kể đặc biệt là quá trình hóa già ở 350^0C.

Kết quả nghiên cứu cho thấy hợp kim Cu-7Ni-6Sn sau đúc được tôi ở 750^0C và hóa già ở 350^0C cho kết quả độ cứng cao nhất.

<u>TÀI LIỆU THAM KHẢO</u>

[1] Metallography and microstructures. ASM Handbook volume 9, 1992 page 1406-1411.

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Spinodal_decomposition.

[3] W. Raymond. Cribb Copper spinodal alloys for areospace, Advanced materials & processes, 6/2006.

[4] Alloys phase diagram, ASM Handbooks Volume 3, 1992.

Người phản biện: PGS.TS. Lê Thị Chiều

THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA CƠ HỆ BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN

ESTABLISHING OF EQUATION OF MOTION BASED ON MATRIX TECHNIQUE

TS. QUẢN TRỌNG HÙNG

Viện Khoa học Cơ sở, Trường ĐHHH

Tóm tắt

Bài báo trình bày việc thiết lập phương trình chuyển động của cơ hệ bằng phương pháp ma trận để có thể ứng dụng kỹ thuật tính giải quyết nhanh các bài toán cơ học phức tạp.

Abstract

This paper explains how to establish equation of motion by using matrix method.

1. Đặt vấn đề

Trong quá trình thiết kế phần cơ khí trong máy móc thiết bị truyền động, hệ thống điều khiển, hệ thống cơ - điện tử…sử dụng trong công nghiệp nói chung và trong tàu thủy nói riêng thì việc thiết lập phương trình chuyển động của cơ hệ theo phương pháp giải tích truyền thống bằng tay luôn rất phức tạp, mất nhiều thời gian tính toán và nhiều khi không khi thể giải được, do khối lượng quá lớn. Do vậy, việc đưa ra các phương pháp khác mà có thể sử dụng sự trợ giúp của các phần mềm máy tính, giúp cho quá trình tính toán nhanh chóng, thuận tiện, bớt cồng kềnh luôn là mong mỏi của các kỹ sư cơ khí. Trong bài báo này, tác giả trình bày phương pháp ma trận để thiết lập phương trình chuyển động của cơ hệ , phương pháp này dựa trên nền tảng là phương pháp giải tích, tuy nhiên các phương trình được đưa về dưới dạng ma trận là thứ ngôn ngữ mà máy tính có thể hiểu được.

2. Phương trình Lagrange dạng ma trận

Khảo sát hệ cơ học hôlônôm n bậc tự do, vị trí của nó được xác định nhờ các tọa độ suy rộng đủ, ký hiệu là $\boldsymbol{q} = \left[q_1, q_2, \ldots, q_n\right]^T$. Giả thiết cơ hệ chịu các liên kết giữ, dừng và lý tưởng. Khi đó, động năng T và thế năng Π của cơ hệ là

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \qquad \Pi = \Pi\left(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n\right) = \Pi\left(\boldsymbol{q}\right). \tag{1}$$

Biểu thức động năng được viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{A}\,\dot{\boldsymbol{q}}. \tag{2}$$

Trong đó: - $\dot{\boldsymbol{q}}$ là ma trận chứa các vận tốc suy rộng, $\dot{\boldsymbol{q}} = \left[\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n\right]^T$.

và $\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ là ma trận quán tính, đó là ma trận vuông không suy biến và xác định dương.

Phương trình chuyển động của cơ hệ trong dạng phương trình Lagrange là:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{q}} + \boldsymbol{Q} \tag{3}$$

Trong đó:

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial T}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial T}{\partial q_n} \end{bmatrix}, \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \\ \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix}, \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

Ma trận $\boldsymbol{Q}$ là ma trận cỡ $(n \times 1)$ có các yếu tố là các lực suy rộng của các lực không thế và giả thiết có dạng:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}\right) \tag{4}$$

Lực $\boldsymbol{Q}$ sẽ bao gồm các lực hao tán, lực gyroscope, lực kích động…

Phương trình vi phân chuyển động (3) có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$\boldsymbol{A}\,\ddot{\boldsymbol{q}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{q}} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^0 - \boldsymbol{Q}^*. \tag{5}$$

Trong đó: $\boldsymbol{Q}^0$ là véctơ cột cỡ $\left(n \times 1\right)$ với các phần tử được tính theo công thức:

$$Q_i^0 = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \partial_i \boldsymbol{A}\,\dot{\boldsymbol{q}} \tag{6}$$

$$\partial_i \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_{11}}{\partial q_i} & \dfrac{\partial a_{12}}{\partial q_i} & \ldots & \dfrac{\partial a_{1n}}{\partial q_i} \\ \dfrac{\partial a_{21}}{\partial q_i} & \dfrac{\partial a_{22}}{\partial q_i} & \ldots & \dfrac{\partial a_{2n}}{\partial q_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial a_{n1}}{\partial q_i} & \dfrac{\partial a_{n2}}{\partial q_i} & \ldots & \dfrac{\partial a_{nn}}{\partial q_i} \end{bmatrix} \tag{7}$$

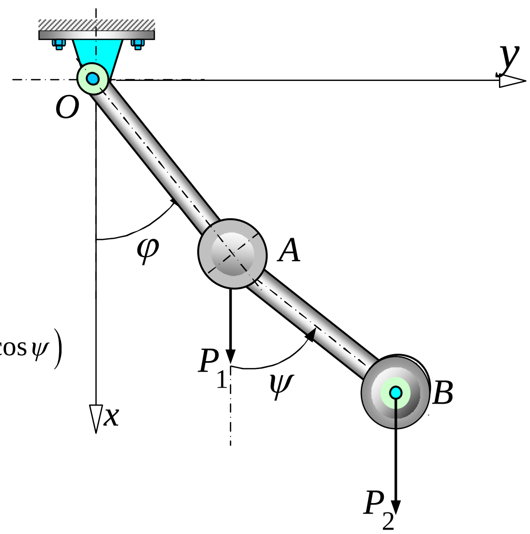
và $\boldsymbol{Q}^*$ là ma trận được tính theo công thức sau:

$$\boldsymbol{Q}^* = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \boldsymbol{A}\,\dot{\boldsymbol{q}}_i^* . \tag{8}$$

$$\text{với } \dot{\boldsymbol{q}}_i^* = \left[\dot{q}_1\dot{q}_i, \dot{q}_2\dot{q}_i, \dot{q}_3\dot{q}_i, \ldots, \dot{q}_n\dot{q}_i\right]^T . \tag{9}$$

3. Ví dụ áp dụng

Sử dụng phương pháp trên, khảo sát con lắc kép toán học có các khối lượng tập trung tại hai điểm A và B.



Các liên kết của con lắc kép là giữ, dừng, hôlônôm và lý tưởng và các lực hoạt động là: $\vec{P}_1$ và $\vec{P}_2$. Chọn các tọa độ suy rộng đủ là $\boldsymbol{q} = \left[\varphi, \psi\right]^T$.

Thế năng của hệ được xác định bằng công thức:

$$\Pi = -m_1 g L_1 \cos\varphi - m_2 g\left(L_1\cos\varphi + L_2\cos\psi\right)$$

Từ đó ta có:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g L_1 \sin\psi \\ m_2 g L_2 \sin\theta \end{bmatrix}$$

Từ hình vẽ ta có:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} L_1\sin\varphi \\ -L_1\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} L_1\sin\varphi + L_2\sin\psi \\ -L_1\cos\varphi - L_2\cos\psi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận Jacobi tịnh tiến được tính bằng:

$$\mathbf{J}_{T_1} = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} L_1\cos\varphi & 0 \\ L_1\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{T_2} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} L_1\cos\varphi & L_2\cos\psi \\ L_1\sin\varphi & L_2\sin\psi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trong đó ma trận quán tính của các thành phần được xác định bằng:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_{T_1}^T m_1 \mathbf{J}_{T_1}^T + \mathbf{J}_{T_2}^T m_2 \mathbf{J}_{T_2}^T = \begin{bmatrix} \left(m_1 + m_2\right) L_1^2 & m_2 L_1 L_2 \cos(\varphi\text{-}\psi) \\ m_2 L_1 L_2 \cos(\varphi\text{-}\psi) & m_2 L_2^2 \end{bmatrix}$$

Từ (7) ta tính được:

$$\partial_\varphi \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 L_1 L_2 \sin(\varphi\text{-}\psi) \\ -m_2 L_1 L_2 \sin(\varphi\text{-}\psi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\partial_\psi \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & m_2 L_1 L_2 \sin(\varphi\text{-}\psi) \\ m_2 L_1 L_2 \sin(\varphi\text{-}\psi) & 0 \end{bmatrix}$$

Từ (6) ta tính được:

$$Q_\varphi^0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot\varphi & \dot\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -m_2 L_1 L_2 \sin(\varphi\text{-}\psi) \\ -m_2 L_1 L_2 \sin(\varphi\text{-}\psi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\varphi \\ \dot\psi \end{bmatrix}$$

$$= -m_2 L_1 L_2 \sin(\varphi\text{-}\psi)\,\dot\varphi\dot\psi$$

$$Q_{\psi}^{0}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{\varphi} & \dot{\psi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & m_2L_1L_2\sin(\varphi-\psi)\\ m_2L_1L_2\sin(\varphi-\psi) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}$$
$$=m_2L_1L_2\sin(\varphi-\psi)\dot{\varphi}\dot{\psi}$$

Từ (8) ta có:

$$\boldsymbol{Q}^{*}=\begin{bmatrix}0 & -m_2L_1L_2\sin(\varphi-\psi)\\ -m_2L_1L_2\sin(\varphi-\psi) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}^2\\ \dot{\varphi}\dot{\psi}\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}0 & m_2L_1L_2\sin(\varphi-\psi)\\ m_2L_1L_2\sin(\varphi-\psi) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\dot{\psi}\\ \dot{\psi}^2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-m_2L_1L_2\sin(\varphi-\psi)\dot{\varphi}\dot{\psi}+m_2L_1L_2\sin(\varphi-\psi)\dot{\psi}^2\\ -m_2L_1L_2\sin(\varphi-\psi)\dot{\varphi}^2+m_2L_1L_2\sin(\varphi-\psi)\dot{\varphi}\dot{\psi}\end{bmatrix}$$

Cuối cùng phương trình chuyển động của con lắc kép sẽ có dạng như sau:

$$\left(m_1+m_2\right)L_1^2\ddot{\varphi}+m_2L_1L_2\ddot{\psi}\cos\left(\varphi-\psi\right)+m_2L_1L_2\dot{\psi}^2\sin\left(\varphi-\psi\right)+\left(m_1+m_2\right)gL_1\sin\varphi=0.$$

$$m_2L_1L_2\ddot{\varphi}\cos\left(\varphi-\psi\right)+m_2L_2^2\ddot{\psi}-m_2L_1L_2\dot{\varphi}^2\sin\left(\varphi-\psi\right)+m_2gL_2\sin\psi=0.$$

4. Kết luận

Bài báo đã trình bày các bước thiết lập phương trình chuyển động của cơ hệ dạng tổng quát dưới dạng ma trận, có ví dụ áp dụng. Trong ví dụ này, các bước tiến hành vẫn được tác giá tính toán bằng tay. Tuy nhiên theo quy trình tiến hành như trên, dựa trên phần mềm toán học nổi tiếng Maple, chúng ta sẽ lập trình được một thuật toán chung để có thể cho ra phương trình chuyển động của một cơ hệ bất kỳ một cách đơn giản và thuận tiện.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Văn Khang, *Cơ sở Cơ học kỹ thuật*, Tập 2 – Động lực học, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2005.

[2] Nguyễn Văn Khang, *Động lực học hệ nhiều vật*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2007.

[3] Đỗ Sanh, Đỗ Đăng Khoa, *Một dạng phương trình chuyển động của các hệ cơ học*, Tuyển tập Hội nghị cơ học toàn quốc, Tập 1, Động lực học và điều khiển, Hà Nội, 2008.

[4] Do Sanh, Do Dang Khoa, *Method of transmission matrix for investigating planar relative motion*, Vietnam Journal of Mechnics, VAST, Vol.29, No 2, 2007, pp.105-116.

[5] Đinh Văn Phong, *Phương pháp số trong Cơ học*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2005.

[6] Nikravesh P. E, *Computer Aided Analysis of Mechanical Systems*, Printice Hall, Englewood Clifs, New Jersey, 1988.

[7] Gutowski R., *Analitycal Mechanics*, Warszawa, 1980.

Người phản biện: TS. Đào Ngọc Biên; TS. Vũ Văn Duy