KHẢO SÁT ỔN ĐỊNH VÀ RẼ NHÁNH CỦA HỆ VAN DER POL - DUFFING BẰNG PHƯƠNG PHÁP BẮN

VAN DER POL - DUFFING VIBRATION SYSTEM STABILITY AND BIFURCATION BY SIMPLE SHOOTING METHOD

ThS. HOÀNG MẠNH CƯỜNG
Bộ môn Cơ học, Trường Đại học Hàng hải

Tóm tắt

Trong bài báo này đề cập đến sự ổn định và rẽ nhánh của các nghiệm tuần hoàn của hệ dao động Van der Pol-Duffing. Sử dụng phương pháp bắn đơn tìm nghiệm tuần hoàn của hệ dao động, sau đó nghiên cứu sự ổn định của nghiệm tuần hoàn và xác định các điểm rẽ nhánh.

Abstract

The article deals stability and bifurcation of periodic solutions of Van der Pol-Duffing vibration system. By using simple shooting method for finding periodic solutions of vibration system. The author studies stability of periodic solutions and determines bifurcation points of system.

1. Mở đầu

Mục đích của bài báo này là giới thiệu một phương pháp số tính toán và khảo sát ổn định của nghiệm tuần hoàn. Việc tính toán nghiệm tuần hoàn và nghiên cứu sự ổn định nó đã được các nhà toán học nghiên cứu khá kỹ về mặt lý thuyết và đã đề cập trong nhiều báo cáo [3, 4, 5, 8]. Nhưng việc áp dụng các công cụ toán học để khảo sát ổn định và xác định các điểm rẽ nhánh của của nghiệm tuần hoàn là vấn đề còn khá mới và đang được nhiều người quan tâm nghiên cứu [2, 6, 7, 9, 10]. Hầu hết các trong các báo cáo đã công bố đều sử dụng phương pháp cân bằng điều hoà gia lượng để tính toán và khảo sát rẽ nhánh của nghiệm tuần hoàn. Trong bài báo này tác giả áp dụng phương pháp bắn đơn tính toán của nghiệm tuần hoàn đối với hệ Van der Pol-Duffing, một mô hình cơ học của nhiều hệ kỹ thuật, sau đó đi khảo sát sự ổn định của nghiệm và xác định các điểm rẽ nhánh của hệ.

2. Phương pháp bắn đơn tìm nghiệm tuần hoàn của các dao động hệ phi tuyến

Cho hệ phương trình vi phân có dạng:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mu)\,, \qquad (1)$$

Trong đó: $\mathbf{x} \in R^n$, $f \in R^n$, μ là tham số, $\mathbf{f}(\mathbf{x},t,\mu)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ T_e:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t + T_e, \mu) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mu)\,. \qquad (2)$$

Khi đó chu kỳ T của nghiệm tuần hoàn cần tìm là một bội số hữu tỷ của T_e và là một số đã biết. Do đó, để thực hiện phương pháp bắn tìm nghiệm tuần hoàn chu kỳ T, ta phải đi xác định điều kiện đầu $\mathbf{x}(0) = \eta$ sao cho nghiệm của hệ (1) tương ứng với điều kiện đầu này có dạng:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\eta})\,, \qquad (3)$$

Thỏa mãn điều kiện

$$\mathbf{x}(T, \boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\eta} = 0\,, \qquad (4)$$

(4) là hệ n phương trình đại số phi tuyến với n ẩn số là η_k (k =1, 2,…, n). Để giải hệ phương trình đại số này ta có thể sử dụng các phương pháp lặp, như phương pháp Newton-Raphson được trình bày dưới đây:

Ban đầu ta cho một sự ước chừng điều kiện đầu $\eta^{(0)}$ và mong muốn sự chênh lệch $\delta\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^{(0)}$ thoả mãn điều kiện $\|\delta\boldsymbol{\eta}\| < \varepsilon$, với ε là một số nhỏ cho trước để:

$$\mathbf{x}(\mathrm{T}, \boldsymbol{\eta}^{(0)} + \delta\boldsymbol{\eta}) - (\boldsymbol{\eta}^{(0)} + \delta\boldsymbol{\eta}) \approx 0 . \tag{5}$$

Khai triển Taylor đối với (5) và chỉ giữ lại các số hạng tuyến tính đối với $\delta\eta$, ta được:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathrm{T}, \boldsymbol{\eta}^{(0)}) - \mathbf{E}\right]\delta\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^{(0)} - \mathbf{x}(\mathrm{T}, \boldsymbol{\eta}^{(0)}) , \tag{6}$$

trong đó **E** là ma trận đơn vị cấp n×n, $\mathbf{x}(\mathrm{T},\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ là véc tơ cấp n×1 được xác định bằng cách tích phân phương trình vi phân (1) với điều kiện đầu $\mathbf{x}(0) = \eta^{(0)}$ trong khoảng thời gian từ t = 0 đến t = T. Còn $\partial\mathbf{x}/\partial\eta$ là ma trận cấp n×n các thành phần của ma trận này tại $(\mathrm{T},\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ cũng được xác định bằng cách đạo hàm hai vế phương trình (1) theo η, ta được:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right) = \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathrm{t}, \mu)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\eta}} , \tag{7}$$

Ngoài ra đạo hàm của điều kiện đầu $\mathbf{x}(0) = \eta$ đối với η, ta được

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(0) = \mathbf{E} . \tag{8}$$

Ta thấy (7) là phương trình vi phân đối với $\partial\mathbf{x}/\partial\eta$, ta tích phân phương trình vi phân này với điều kiện đầu (8) trong khoảng thời gian từ 0 tới T, ta được $\partial\mathbf{x}/\partial\eta$ tại $(\eta^{(0)}, \mathrm{T})$. Khi ma trận $\partial\mathbf{x}/\partial\eta$ được xác định thì hệ (6) trở thành hệ n phương trình đại số tuyến tính với các ẩn số là $\delta\eta_k$ (k = 1, …, n). Sau khi giải hệ phương trình này để xác định $\delta\eta_k$ (k = 1,…, n), ta kiểm tra tiêu chuẩn hội tụ $\|\delta\boldsymbol{\eta}\| < \varepsilon$, ở đó ε là một số nhỏ cho trước. Nếu tiêu chuẩn hội tụ không được thoả mãn, ta cập nhật lại điều kiện đầu:

$$\boldsymbol{\eta}^{(0)} = \boldsymbol{\eta}^{(0)} + \delta\boldsymbol{\eta} \tag{9}$$

và quay lại các bước ở trên cho đến khi các tiêu chuẩn hội tụ được thoả mãn. Sau khi kết thúc thủ tục ta tìm được điều kiện đầu η tương ứng với nghiệm tuần hoàn chu kỳ T của hệ (1).

3. Khảo sát ổn định và xác định các điểm rẽ nhánh

Giả sử bằng phương pháp bắn đã giới thiệu ở trên ta tìm được nghiệm tuần hoàn của hệ (1) là $\mathbf{x}^*(\mathrm{t})$, khi đó hệ tuyến tính hoá của hệ (1) quanh nghiệm tuần hoàn này có dạng:

$$\dot{\mathbf{z}} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathrm{t}, \mu)}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}^*(\mathrm{t})}\mathbf{z} \tag{10}$$

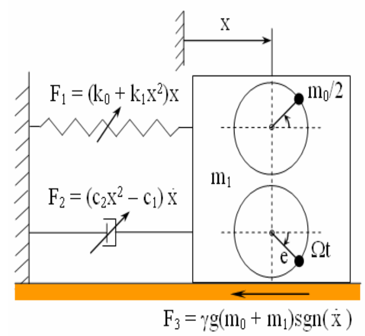
Ta tích phân hệ này trong khoảng thời gian 1 chu kỳ T của nghiệm ta được ma trận $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mu) = \mathbf{z}(\mathrm{T})$, được gọi là ma trận đơn đạo. Dựa trên cơ sở lý thuyết Foquet về hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn và lý thuyết rẽ nhánh của nghiệm tuần hoàn [5], ta có các kết luận sau:

- Nếu các trị riêng của ma trận **C** nằm trong vòng tròn đơn vị thì nghiệm $\mathbf{x}^*(\mathrm{t})$ ổn định.
- Nếu các trị riêng của ma trận **C** nằm ngoài vòng tròn đơn vị thì nghiệm $\mathbf{x}^*(\mathrm{t})$ không ổn định.
- Ta thấy **C** phụ thuộc vào tham số μ dẫn đến các trị riêng của nó sẽ thay đổi khi tham số μ thay đổi, khi đó:
  + Nếu các trị riêng của **C** thay đổi đi ra khỏi vòng tròn đơn vị theo hướng +1, ta có một trong các rẽ nhánh cyclic-fold, chuyển qua giới hạn, hoặc rẽ nhánh phá huỷ tính đối xứng.
  + Nếu các trị riêng của **C** thay đổi đi ra khỏi vòng tròn đơn vị theo hướng -1, ta có rẽ nhánh nhân đôi chu kỳ.

+ Nếu có cặp trị riêng là số phức liên hợp rời vòng tròn đơn vị, ta có rẽ nhánh Hopf loại 2.

4. Thiết lập phương trình vi phân dao động

Khảo sát mô hình dao động của hệ được cho như trong hình 1. Trong đó hai rôto có cùng khối lượng lệch tâm là $m_0/2$, cùng độ lệch tâm e và cùng quay đều với vận tốc góc Ω. Vật dao động có có khối lượng là m_1, được đặt trên nền không nhẵn với lực ma sát là $\gamma g(m_0+m_1)\operatorname{sgn}(\dot{x})$. Lò xo có độ cứng phi tuyến, lực đàn hồi của nó là $(k_0 + k_1x^2)x$. Phần tử cản cũng có hệ số cản phi tuyến và lực cản của nó là $(c_2x^2 - c_1)\dot{x}$. Khi đó, động năng của cơ hệ có dạng:



Hình 1. Mô hình dao động.

$$T = \frac{1}{2}(m_0+m_1)\dot{x}^2 - \dot{x}m_0 e\sin\Omega t + \frac{1}{2}m_0e^2\Omega^2 \qquad (11)$$

Lực suy rộng của các lực hoạt động là:

$$Q = -(k_0+k_1x^2)x - (c_2x^2-c_1)\dot{x} - \gamma g(m_0+m_1)\operatorname{sgn}(\dot{x}) \qquad (12)$$

Thay (11) và (12) vào phương trình Lagrange loại II, ta được phương trình vi phân dao động của hệ như sau:

$$(m_0+m_1)\ddot{x} + (c_2x^2-c_1)\dot{x} + k_0x + k_1x^3 + \gamma g(m_0+m_1)\operatorname{sgn}(\dot{x}) = em_0\Omega^2\cos\Omega t \qquad (13)$$

Từ phương trình (13) ta thực hiện phép đổi biến $y = \sqrt{c_2/c_1}\,x$, ta nhận được:

$$\ddot{y} + \frac{c_1}{m}(y^2-1)\dot{y} + \frac{k_0}{m}y + \frac{k_1c_1}{mc_2}y^3 + \gamma g\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\operatorname{sgn}(\dot{y}) = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\frac{em_0\Omega^2}{m}\cos\Omega t \qquad (14)$$

Trong đó $m = m_0 + m_1$, ta đặt:

$$\varepsilon\mu = \frac{c_1}{m};\ \omega^2 = \frac{k_0}{m};\ \varepsilon\beta = \frac{k_1c_1}{mc_2};\ \varepsilon\delta = \gamma g\sqrt{\frac{c_2}{c_1}};\ \varepsilon E = \frac{em_0}{m}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \qquad (15)$$

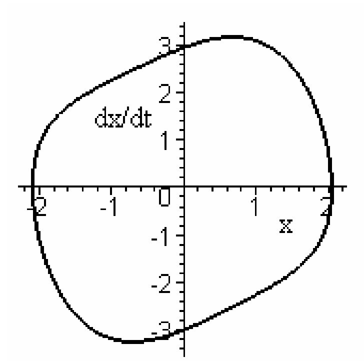
Khi đó ta được:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \varepsilon\left[\mu(1-y^2)\dot{y} - \beta y^3 - \delta\operatorname{sgn}(\dot{y}) + E\Omega^2\cos\Omega t\right] \qquad (16)$$

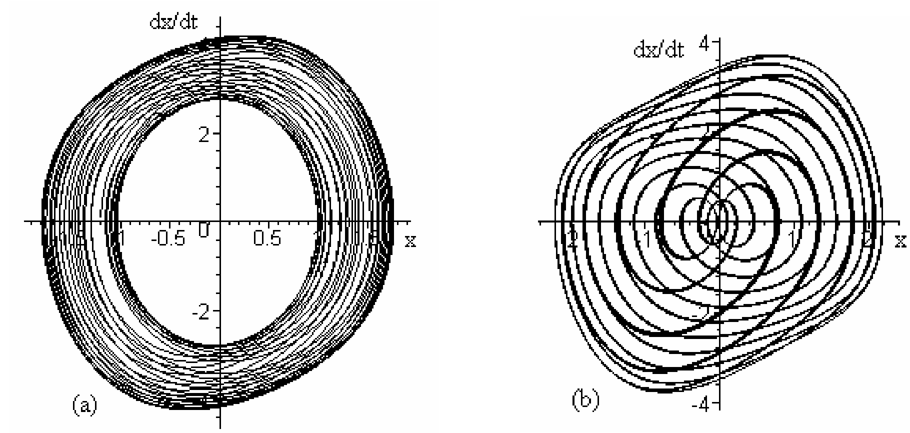
Hệ dao động được cho dưới dạng phương trình (16) được gọi là hệ dao động Van der Pol-Duffing.

5. Các kết quả tính toán số

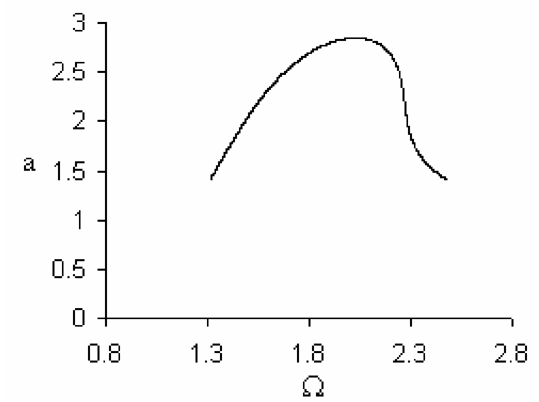
Xét hệ dao động (16), để tính toán bằng số ta lấy Ω làm tham số rẽ nhánh, còn các đại lượng khác ta lấy giá trị như sau: $\varepsilon = 1{,}0$; $\omega = 1{,}5$; $\mu = 0{,}5$; $\beta = 0{,}3$; $\delta = 0{,}06$; $E = 0{,}8$.



Hình 2. Quỹ đạo pha của nghiệm tuần hoàn ổn định của hệ (16) tại Ω = 1,5.



Hình 3. Quỹ đạo pha của nghiệm không ổn định của hệ (16).
a) tại Ω = 2,5, b) tại Ω = 1,3



Hình 4. Đường cong biên độ nghiệm tuần hoàn của hệ (16) phụ thuộc tham số Ω.

Với các số liệu cho như trên, ta thấy rằng, tại Ω = 1,5 bằng phương pháp bắn ta tìm được một nghiệm tuần hoàn ổn định, quỹ đạo pha của nghiệm tuần hoàn này được cho trên hình 2. Sự ổn định của nghiệm này được kiểm tra bằng cách xác định các trị riêng của ma trận đơn đạo và thấy chúng nằm trong vòng tròn đơn vị của mặt phẳng phức. Xuất phát từ giá trị này, cho Ω tăng dần lên, tại mỗi giá trị của Ω ta tìm được một nghiệm tuần hoàn ổn định tương ứng với giá trị Ω đó. Cho đến khi Ω = 2,469, tại đây có trị riêng của ma trận đơn đạo của nghiệm tuần hoàn tương ứng với giá trị Ω này nằm trên vòng tròn đơn vị, do đó giá trị này được gọi là một giá trị rẽ nhánh. Từ đây, nếu ta tiếp tục tăng Ω lên nghiệm của hệ (16) không còn ổn định nữa và chúng trở nên rối loạn. Một nghiệm không ổn định của hệ (16) tại Ω = 2,5 được cho trên hình 3a. Tương tự như vậy, nếu xuất phát từ Ω = 1,5, cho Ω giảm dần thì cũng đến giá trị Ω = 1,319, ta có một giá trị rẽ nhánh nữa và khi Ω giảm qua giá trị này nghiệm của hệ không còn ổn định và cũng trở nên rối loạn. Một nghiệm không ổn định khác của hệ (16) tại Ω = 1,3 được cho trên hình 3b. Vậy nghiệm của hệ (16) chỉ ổn định khi Ω nằm trong miền [1,319, 2,469]. Trên hình 4, biểu diễn đường cong biên độ của các nghiệm tuần hoàn ổn định của hệ (16) phụ thuộc vào tham số Ω.

5. Kết luận

Rẽ nhánh là một hiện tượng chỉ xuất hiện trong các hệ dao động phi tuyến và đang được các nhà khoa học quan tâm. Trong bài báo này, giới thiệu một phương pháp số, tính toán và khảo sát ổn định của các nghiệm tuần hoàn, từ đó xác định được các điểm rẽ nhánh. Từ các kết quả thu được ta thấy đối với hệ Van der Pol-Duffing nghiệm tuần hoàn của nó chỉ ổn định trong một miền nhất định của tần số kích động Ω, ngoài miền này nghiệm của hệ không còn ổn định và trở nên rối loạn. Cũng từ các kết quả thu được cho thấy, phương pháp đã đưa ra ở đây rất hiệu quả khi áp dụng cho việc tính toán dao động tuần hoàn và xác định các điểm rẽ nhánh của các hệ dao động phi tuyến.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phạm Thành Chung, *Tính toán dao động tuần hoàn của một số hệ dao động phi tuyến bằng phương pháp bắn*, Luận văn tốt nghiệp cao học, Đại học Bách khoa Hà Nội, 2005.

[2] Lau S. L. and Yuen S. W., *The hopf bifurcation and limit cycle by incremental harmonic balance method*, computer methods in applied mechanics and engineering 91, pp.1109-1121, North-Holland 1991.

[3] Leine R. I. and Vancampen D. H., *Discontinuous bifurcations of periodic solutions*, Mathematical and computer modelling 36, pp.259-273, 2002.

[4] Ling F. H., *Quasi-periodic solutions calculated with the simple shooting technique*, Journal of sound and vibration 144(2), pp.293-304, 1991.

[5] Nayfed A. H., *Applied nonlinear dynamics*, John Wiley & Sons, New York 1995.

[6] Raghothama A., Narayanan S., *Bifurcation and chaos in geared rotor bearing system by incremental hamonic balance method*, Journal of sound and vibration 226(3), pp.469-492, 1999.

[7] Raghothama A., Narayanan S., *Bifurcation and chaos of an articulated loading platform with piecewose non-linear stiffness using the incremental hamonic balance method*, Ocean Engineering 27, pp.1087-1107, 2000.

[8] Seydel R., *New methods for calculating the stability of periodic solutions*, comput. Math. Applic. Vol.14, pp.505-510, 1987.

[9] Xu L., Lu M. W., Cao Q., *Nonlinear vibrations of dynamical systems with a general form of piecewise-linear viscous damping by incremental harmonic balance method*, Physics Letters A 301, pp.65-73, 2002.

[10]Xu L., Lu M. W., Cao Q., *Bifurcation and chaos of a harmonically excited oscillator with both stiffness and viscous damping piecewise linearities by incremental harmonic balance method*, Journal of sound and vibration 264, pp.873-882, 2003.

Người phản biện: TS. Quản Trọng Hùng