SỰ TƯƠNG TỰ GIỮA VECTOR VÀ TÍN HIỆU
THE LIKELIHOOD BETWEEN VECTOR AND SIGNAL
(phần II:, Ứng dụng tính trực giao – the aplication of ortgonality)

TS. TRẦN ĐỨC INH
Khoa Điện – ĐTTB, Trường ĐHHH

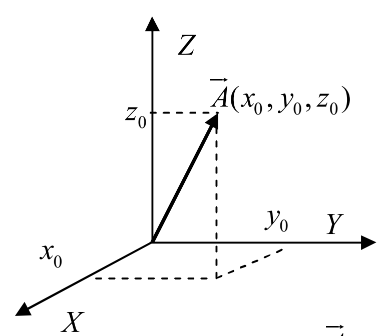
Tóm tắt:
Có thể hiểu biết hay ghi nhớ một vấn đề nào đó một cách dễ dàng hơn[1], nếu chúng ta biết liên hệ với những vấn đề đã biết rõ trước đó. Khi nghiên cứu về tín hiệu, tốt nhất chúng ta hãy liên hệ chúng với những hiểu biết về không gian vector. Giữa không gian vector và không gian tín hiệu có rất nhiều điểm tương tự rất thú vị chúng ta sẽ nhận ra điều nay ngay trong bài báo nay và các số tiếp theo.

Abstract:
In dayli life or in sciential studing, it make you easier to understand new problem, if you find relation between the new and other problems understanded before. During study signals, there is the better way, when you use the results given by studing space of vectors. This paper make you satisfaction to recognize liklihood between vectors and signals

1. Biểu diễn một vector bất kỳ trong không gian các vector trực giao tương hỗ và kín.

Chúng ta hãy bắt đầu từ việc xét không gian vector ba chiều như trên hình vẽ 2.1. Ở đây, ngoài cách ký hiệu vector, độ dài vector như bài báo trước chúng ta còn quy ước các các vector đơn vị theo các trục của tọa độ vuông góc như sau:

- Thành phần vector $\vec{A}$ theo trục OX là: $\overrightarrow{A_x} = x_0.\vec{x}$
- Thành phần vector $\vec{A}$ theo trục OY là: $\overrightarrow{A_y} = y_0.\vec{y}$
- Thành phần vector $\vec{A}$ theo trục OZ là: $\overrightarrow{A_z} = z_0.\vec{z}$



Hình 2.1 Xác định vektor $\vec{A}$ trong không gian ba chiều

Như vậy, một vector bất kỳ $\vec{A}$, xác định trong không gian 3 chiều $OXYZ$ như trên hình vẽ 2.1 có thể biểu diễn bằng tổng:

$$\vec{A} = x_0\vec{x} + y_0\vec{y} + z_0\vec{z}\,, \qquad (2.1)$$

Vì các vector: $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ trong không gian này trực giao tương hỗ với nhau nên:

$$\begin{cases} \vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.\vec{z} = \vec{y}.\vec{z} = 0 \\ \vec{x}.\vec{x} = \vec{y}.\vec{y} = \vec{z}.\vec{z} = 1 \end{cases} \qquad (2.2)$$

Tính chất (2.2) có thể viết một cách tổng quát trong không gian trực giao tương hỗ đa chiều: $\left\{\overrightarrow{X_n}\right\} = \left\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots\ldots \overrightarrow{x_n}\right\}$, dưới dạng:

$$\overrightarrow{x_i}.\overrightarrow{x_j} = \begin{cases} 0, khi : i \neq j \\ 1, khi : i = j \end{cases} \quad, \ i, j = \overline{1, n}\,. \qquad (2.3)$$

Điều thứ hai cần lưu ý là cách biểu diễn (2.1) chỉ hoàn toàn chính xác khi vector $\vec{A}$ được biểu diễn bằng tổng tất cả ba vector trực giao tương hỗ tồn tại trong không gian ba chiều: $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. Điều đó cho thấy, để mô tả một vector bất kỳ trong một không gian có số chiều xác định nào đấy, nhất thiết phải sử dụng hết các vector trực giao tương hỗ thành phần trong không gian đó, nghĩa là phải sử dụng một *không gian trực giao tương hỗ kín (hay đầy).* Điều này đồng nghĩa với điều kiện không tồn tại bất kỳ chỉ số $k \neq i \neq j$ nào đó thỏa mãn điều kiện (2.3). Nếu chúng ta ký hiệu các vector đơn vị trực giao tương hỗ thành phần trong không gian n chiều: $\{X_n\}$ là $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_i}, ...\overrightarrow{x_n}$, cho trước vector $\overrightarrow{A}$ trong không gian này, có các trị thành phần tương ứng trên các trục là:

$$A_{x1}, A_{x2}, ...A_{xi}, ...A_{xn} = C_1, C_2, ..., C_i, ..., C_n, \tag{2.4}$$

khi đó có thể viết:

$$\overrightarrow{A} = C_1.\overrightarrow{x_1} + C_2.\overrightarrow{x_2} + ... + C_i.\overrightarrow{x_i} + ... + C_n.\overrightarrow{x_n}, \tag{2.5}$$

Biểu thức (2.5) được gọi là *cách biểu diễn một vector bất kỳ* $\overrightarrow{A}$ *bằng tổng các vector trực giao tương hỗ trong một không gian trực giao tương hỗ và kín*. Các hệ số $C_1, C_2, ..., C_i, ..., C_n$ trong biểu thức (2.5) mô tả các trị thành phần của vector $\overrightarrow{A}$ trên các vector tương ứng $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_i}, ...\overrightarrow{x_n}$, có tên gọi là *chỉ số tương tự* và được xác định:

$$C_r = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{x_r}, \tag{2.6}$$

Kết quả này có thể nhận được bằng cách nhân cả hai vế của (2.5) với $\overrightarrow{x_r}$:

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{x_r} = C_1\overrightarrow{x_r}.\overrightarrow{x_1} + C_2\overrightarrow{x_r}.\overrightarrow{x_2} + ... + C_r\overrightarrow{x_r}.\overrightarrow{x_r} + ... + C_n\overrightarrow{x_r}.\overrightarrow{x_n}, \tag{2.7}$$

trong tổng (2.7) tất cả các thành phần $C_j.\overrightarrow{x_j}.\overrightarrow{x_r}$ của vế phải, nếu $j \neq r$ đều bằng 0, nên:

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{x_r} = C_r.\overrightarrow{x_r}.\overrightarrow{x_r} = C_r \tag{2.8}$$

Tập hợp các vector $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_i}, ...\overrightarrow{x_n}$ *, thỏa mãn điều kiện (2.3) được gọi là không gian các vector trực giao tương hỗ.*

Vì tích vô hướng của các vector với chính mình có thể không chỉ bằng 1 mà bằng một giá trị k nào đấy, khi đó *điều kiện trực giao* (2.3) có thể viết dưới dạng:

$$\overrightarrow{x_i}.\overrightarrow{x_j} = \begin{cases} 0, khi : i \neq j \\ k, khi : i = j \end{cases} \tag{2.9}$$

chỉ số tương tự (2.6) có thể viết dưới dạng:

$$C_r = \frac{\overrightarrow{A}.\overrightarrow{x_r}}{\overrightarrow{x_r}.\overrightarrow{x_r}} = \frac{\overrightarrow{A}.\overrightarrow{x_r}}{k_r} \tag{2.10}$$

2. Biểu diễn một tín hiệu bất kỳ trong không gian các tín hiệu trực giao tương hỗ và kín.

Tương tự như trong không gian các vector, nếu một không gian n các tín hiệu:

$$\{g_n(t)\} = \{g_1(t), g_2(t), ..., g_i(t), ..., g_n(t)\}, \tag{2.11}$$

xác định trong miền giới hạn: $t \subset (t_1, t_2)$, thỏa mãn điều kiện:

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t).g_j^*(t)dt = \begin{cases} 0, khi : i \neq j \\ k_i, khi : i = j \end{cases} \tag{2.12}$$

Thì không gian (2.11) được gọi là không gian các tín hiệu trực giao tương hỗ trong miền giới hạn t_1 *đến* t_2. Đồng thời nếu không tồn tại bất kỳ một giá trị $k \neq j$ nào đó, điều kiện (2.12) vẫn được thỏa mãn, thì không gian $\{g_n(t)\}$ được gọi là *không gian trực giao tương hỗ kín* hay *đầy.* Khi đó một tín hiệu bất kỳ $s(t)$ cho trước, xác định trong miền giới hạn (t_1, t_2), có thể biểu diễn bằng tổng giới hạn các thành phần là tín hiệu trực giao và kín (2.11):

$$s(t) = C_1.g_1(t) + C_2.g_2(t) + ... + C_i.g_i(t) + ... + C_n.g_n(t) = \sum_{r=1}^{n} C_r.g_r(t), \tag{2.14}$$

trong đó, các hệ số tương tự C_r được xác định như (2.6) hay tổng quát hơn là (2.10)

$$C_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} s(t).g_r(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)dt} = \frac{1}{k_r}\int_{t_1}^{t_2} s(t).g_r(t)dt \tag{2.15}$$

Có thể chứng minh một cách dễ dàng rằng tập hợp các hàm lượng giác: $\{\cos n\omega t\}$ hoặc $\sin n\omega t$ đều là các tập hợp trực giao nhưng chưa kín (đầy) bởi chính các hàm $\cos n\omega t$ và $\sin n\omega t$ là những hàm trực giao với nhau. Do đó tập hợp các hàm lượng giác trực giao và kín phải là tập hợp chung của các hàm lượng giác đó :

$$\{\cos n\omega t, \sin n\omega t\} \text{ với } n = \overline{-\infty,\infty} \tag{2.16}$$

Đây là tập hợp các hàm thực và như vậy cũng có thể chứng minh rằng tập hợp các hàm mũ :

$$\left\{e^{jn\omega_0 t}\right\}, n = \overline{-\infty,\infty}, \tag{2.17}$$

Cũng là tập hợp các tín hiệu trực giao và kín trong miền $(0,T_0)$, $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Tập hợp trực giao và kín có thể là đa thức Legendre'a :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1), n = 1,2,...,(-1\langle t\langle 1) \tag{2.18}$$

Trong kỹ thuật viễn thông không được xử rộng rộng rãi, nên chúng ta cũng không cần quan tâm tới.

2.1. Chuỗi lượng giác Fourie

Như đã biết và có thể chứng minh rằng tập các hàm lượng giác $\{\cos n\omega t, \sin n\omega t\}$, $n = \overline{-\infty,\infty}$, là tập các hàm trực giao và kín trong miền $(0,T_0)$, $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Do đó, một tín hiệu bất kỳ $s(t)$, xác định trong miền giới hạn $t \subset (t_1,t_2) = (t_0, t_0 + 2\pi/\omega_0)$ có thể được biểu diễn dưới dạng chuỗi Fourie lượng giác:

$$s(t) = a_0 + a_1\cos\omega_0 t + a_2\cos 2\omega_0 t + ... + a_n\cos n\omega_0 t +$$

$$+ b_1\sin\omega_0 t + b_2\sin 2\omega_0 t + ... + b_n\sin n\omega_0 t. = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t) \tag{2.19}$$

với $t_0\langle t\langle t_0 + T_0$, $T_0 = 2\pi/\omega_0$, trong đó các *hệ số tương tự* a_n và b_n được xác định từ biểu thức (2.15) có dạng:

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t).\cos n\omega_0 t dt,\quad b_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t).\sin n\omega_0 t dt, \tag{2.20}$$

2.2. Chuỗi hàm mũ Fourie.

Vì tập hợp các hàm mũ: $\left\{e^{jn\omega_0 t}\right\}$, với $n = \overline{-\infty,\infty}$, là một tập hợp các hàm phức, trực giao và kín trong miền $t_0\langle t\langle t_0 + T_0$, trong đó $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Khi đó, với một tín hiệu $s(t)$ bất kỳ, xác định trong miền $t_0\langle t\langle t_0 + T_0$ có thể biểu diễn bằng tổng các hàm mũ như sau :

$$s(t) = s_0 + s_1.e^{j\omega_0 t} + s_2.e^{j2\omega_0 t} + ... + s_n.e^{jn\omega_0 t} + ...$$

$$+ s_{-1}.e^{-j\omega_0 t} + s_{-2}.e^{-j2\omega_0 t} + ... + s_{-n}.e^{-jn\omega_0 t} = = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n.e^{jn\omega_0 t},$$

với $$t_0\langle t\langle t_0 + T_0 \tag{2.22}$$

trong đó :

$$s_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t).e^{-jn\omega_0 t}.dt}{\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jn\omega_0 t}.e^{-jn\omega_0 t}.dt} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t).e^{-jn\omega_0 t}.dt\ . \qquad (2.23)$$

Là các hệ số tương tự thành phần.

Các cách biểu diễn các tín hiệu bất kỳ trong miền xác định giới hạn trên có thể mở rộng ra miền vô hạn. Nghĩa là quá trình phân tích tín hiệu được xét trong khoảng thời gian dài. Khi đó, nếu tín hiệu cần phân tích có tính chất chu kỳ thì hai vế của đẳng thức (2.19) và (2.21) cũng luôn đúng, và chúng ta có :

$$s_{T_0}(t) = s(t + nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n.e^{jn\omega_0 t} \qquad (2.24)$$

Nhưng nếu tín hiệu cần phân tích là bất kỳ, không tuần hoàn, chúng ta cũng có thể chứng minh rằng các tín hiệu này là tuần hoàn với chu kỳ lập lại $T_0 \to \infty$. Khi đó tổng (2.21), sẽ tiến tới một tổng vô hạn:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega).e^{j\omega t}.d\omega \qquad (2.25a)$$

trong đó,

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t).e^{-j\omega t}.dt \qquad (2.25b)$$

Đây chính là phép biến đổi Fourie thuận (2.25b) và Fourie ngược (2.25a).

3. Nhận xét chung

Từ các cách biểu diễn Fuorie kể trên cho thấy :

- Ứng dụng của các tín hiệu trực giao trong khi phân tích tín hiệu như thế nào. Đó là quá trình tìm các thành phần năng lượng của tín hiệu xác định, bất kỳ cho trước $s(t)$ ở các tần số khác nhau. Chính là quá trình tìm phổ tần của tín hiệu xác định $s(t)$, điều này đồng nghĩa với việc biểu diễn một tín hiệu cho trước, xác định trong miền thời gian bằng một cách xác định khác, trong miền tần số - phổ $s(\omega)$ của tín hiệu $s(t)$.
- Các tín hiệu xác định trong một miền thời gian giới hạn, luôn có các thành phần giới hạn và rời rạc – phổ rời rạc (2.19) và (2.22).
- Trong miền thời gian vô hạn các tín hiệu tuần hoàn luôn có phổ rời rạc (2.24), còn các tín hiệu không tuần hoàn luôn có phổ liên tục (2.25b).
- Các thành phần của phổ luôn phụ thuộc vào bản chất của tín hiệu cần phân tích, hay phụ thuộc vào các tin cần truyền (vì tín hiệu là một dạng biểu diễn của tin) và quá trình phân tích tín hiệu chính là quá trình xác định các đặc tính của các mạch lọc tín hiệu theo tần số ở phía thu và độ rộng kênh truyền ở phía phát, trong hệ thống truyền tin bằng phương pháp liên tục.

TÀI LIỆU THAM KHẢO:

[1] – T.S. Trần Đức Inh. Tập bài giảng *"Cơ sở lý thuyết truyền tin"*.

[2] – B.P. Lathi *"Các hệ thống viễn thông. 1992.* Associate Professor of Electrical Engineering. Bradley University.

Người phản biện: TS. Lê Quốc Vượng