# TÍNH TOÁN KẾT CẤU THEO LÝ THUYẾT ĐỘ TIN CẬY

CALCULATING STRUCTURAL ACCORDING TO RELIABILITY THEORY

**ThS. LÊ TÙNG ANH**
*Khoa Công trình thủy, Trường ĐHHH*

***Tóm tắt***

*Ngày nay, phương pháp đánh giá độ tin cậy của một yếu tố kết cấu hay hệ kết cấu công trình dựa trên cơ sở lý thuyết xác suất và quá trình ngẫu nhiên đã chứng tỏ tính ưu việt so với phương pháp cổ điển sử dụng hệ số tải trọng đơn thuần. Trong bài viết này, tác giả giới thiệu phương pháp tính toán kết cấu theo lý thuyết độ tin cậy của một kết cấu được lắp dựng khá phổ biến trong các công trình xây dựng dân dụng và công nghiệp: Hệ ba khớp.*

***Abstract***

*Nowadays, in comparison with the classical method which uses the load factor for structural engineering, the methods of reliability assessments of a structural element or structural system based on the probability and random theory have achieved satisfactory results. In this article, we would like to introduce a method for structural calculating according to reliability theory of a commonly used structure in construction: The three-hinged frame.*

## 1. Đặt vấn đề

Thông thường, khi thiết kế và tính toán an toàn cho một kết cấu hay hệ kết cấu công trình, người thiết kế sử dụng các hệ số an toàn, giá trị được chọn tùy theo tính chất, quy mô và tầm quan trọng của công trình. Tuy nhiên, vấn đề đặt ra là chọn hệ số an toàn với giá trị bao nhiêu là phù hợp để thoả mãn đồng thời các yêu cầu về kinh tế và kỹ thuật. Xuất phát từ sự tính toán mang tính ước lượng đó, phương pháp tính toán kết cấu dựa trên cơ sở lý thuyết độ tin cậy đã được áp dụng và đạt được những kết quả khả quan. Việc tiếp cận và sử dụng phương pháp tính toán mới này là một điều kiện cần thiết để theo kịp những bước tiến mới của khoa học công trình, đồng thời tạo thuận lợi trong việc hội nhập quốc tế (áp dụng ISO 2394 - 1998).

Các kiến thức cần thiết để tính toán kết cấu theo lý thuyết độ tin cậy bao gồm:

- Kiến thức về lý thuyết xác suất và quá trình ngẫu nhiên.
- Kiến thức về cơ học công trình (bao gồm các Tiêu chuẩn thiết kế và đánh giá các công trình hiện hữu).

## 2. Cơ sở lý thuyết

Kết cấu được gọi là an toàn và đáng tin cậy khi giá trị giới hạn theo chỉ tiêu tính (độ bền, cứng, bền mòn…) vượt quá giá trị tính toán. Do đó, để tính toán độ tin cậy của kết cấu đòi hỏi các hiểu biết về bản chất ngẫu nhiên của độ bền z (hoặc độ cứng, độ bền mòn…) và ứng suất y (hoặc độ võng, lượng mòn…). Nếu như hàm phân bố xác suất của chúng được biết là $f_1(z)$ và $f_2(y)$ như hình vẽ thì độ tin cậy của chúng được ước lượng bằng các biểu thức tích phân. Trong trường hợp mà Z và Y phân bố theo quy luật chuẩn, logarit chuẩn, hàm số mũ, Weibull… các công thức tích phân có thể rút gọn thành các dạng đơn giản. Hàm g(Z, Y) = Z - Y gọi là hàm trạng thái giới hạn, kết cấu an toàn khi g(Z, Y) > 0, bị hỏng khi g(Z, Y) $\leq$ 0.

Giả sử độ bền Z và ứng suất Y phân bố theo quy luật chuẩn theo các hàm mật độ phân bố sau:

$$f_1(z) = \frac{1}{S_z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2S_z^2}} \quad ; \quad f_2(y) = \frac{1}{S_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2S_y^2}} \quad ; \quad -\infty < z, y < \infty \qquad (2.1)$$

Trong đó: $m_z$ và $m_y$ là giá trị trung bình; $S_z$ và $S_y$ là sai lệch bình phương trung bình của các đại lượng ngẫu nhiên Z và Y.

Khi đó độ tin cậy của kết cấu có thể biểu diễn bằng biểu thức:

$$R = P(g = Z - Y \geq 0) = P(g \geq 0) \qquad (2.2)$$

Trong đó: g = Z – Y là biến ngẫu nhiên mới.

Vì Z và Y là hàm bậc nhất theo các biến ngẫu nhiên phân bố chuẩn nên g cũng phân bố theo quy luật chuẩn. Hàm mật độ phân bố của đại lượng ngẫu nhiên g được xác định theo công thức:

$$f(g) = \frac{1}{S_g\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(g-m_g)^2}{2S_g{}^2}} \quad ; \quad -\infty < z, y < \infty \tag{2.3}$$

Nếu Z và Y là các đại lượng độc lập, giá trị trung bình và sai lệch bình phương trung bình của g có thể xác định theo công thức:

$$m_g = m_Z - m_Y \quad ; \quad S_g = \sqrt{S_Z{}^2 + S_Y{}^2} \tag{2.4}$$

Do đó biểu thức (2.2) có thể viết dưới dạng sau:

$$R = P(g \geq 0) = \int_0^\infty f(g)dg = \frac{1}{S_g\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(g-m_g)^2}{2S_g{}^2}} dg \tag{2.5}$$

Nếu thay thế $z_1 = \frac{g - m_g}{S_g}$ (với $z_1$ gọi là *điểm phân vị chuẩn*) thì độ tin cậy có thể xác định như sau:

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^\infty e^{-\frac{z_1{}^2}{2}} dz_1 = 1 - \Phi(g) \tag{2.6}$$

Khi g = 0 thì

$$z_1 = \frac{0 - m_g}{S_g} = -\frac{m_Z - m_Y}{\sqrt{S_Z^2 + S_Y^2}} = -\beta \quad \text{(với } \beta \text{ gọi là \textit{chỉ số độ tin cậy})} \tag{2.7}$$

Ở đây $z_1$ (hoặc $\beta$) có thể xác định theo giá trị trung bình và sai lệch bình phương trung bình của các đại lượng ngẫu nhiên Z và Y. Độ tin cậy của kết cấu xác định bằng cách tra bảng phụ lục 1 (trang 303, [3]) theo giá trị $z_1$ (hoặc $\beta$) thu được từ công thức (2.7).

Khi độ bền Z và ứng suất Y là hàm số nhiều đại lượng ngẫu nhiên $Z = f_1(Z_1, Z_2, \ldots Z_m) = f_1(X_1, X_2, \ldots X_m)$ và $Y = f_2(Y_1, Y_2, \ldots Y_k) = f_2(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots X_{m+k})$ ta sử dụng xấp xỉ bậc nhất hoặc bậc hai của dãy Taylor để xác định giá trị trung bình $m_g$ và sai lệch bình phương trung bình $S_g$ của hàm khả vi $g(X) = g(X_1, X_2, \ldots X_n)$ với các biến ngẫu nhiên độc lập $X_1, X_2, \ldots X_n$ và n = m + k.

Giả sử $X_1, X_2, \ldots X_n$ phân bố theo quy luật chuẩn có giá trị trung bình $m = (m_{X1}, m_{X2}, \ldots m_{Xn})$ và sai lệch bình phương trung bình $S = (S_{X1}, S_{X2}, \ldots S_{Xn})$. Sau đó khai triển $g(X) = g(X_1, X_2, \ldots X_n)$ thành chuỗi Taylor. Nếu ta khai triển chuỗi Taylor tại giá trị trung bình các đại lượng ngẫu nhiên thì giá trị trung bình $m_g$ và sai lệch bình phương trung bình $S_g$ xác định theo công thức sau:

$$m_g = g(m_{X1}, m_{X2}, \ldots m_{Xn}) = g(m)$$

$$S_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)_m^2 S_{X1}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\right)_m^2 S_{X2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial g}{\partial X_n}\right)_m^2 S_{Xn}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_m^2 S_{Xi}^2} \tag{2.8}$$

Xác suất làm việc không hỏng xác định theo công thức:

$$R = P(g(X) > 0) = 1 - P(g(X) < 0)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{-m_g}{S_g}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-g(m_{X1}, m_{X2}, \ldots m_{Xn})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_m^2 S_{Xi}^2}}\right) = 1 - \Phi(z_1) = 1 - \Phi(-\beta) \tag{2.9}$$

Khi tính toán kết cấu trên cơ sở độ bền thì $z_1$ và $\beta$ xác định theo công thức sau:

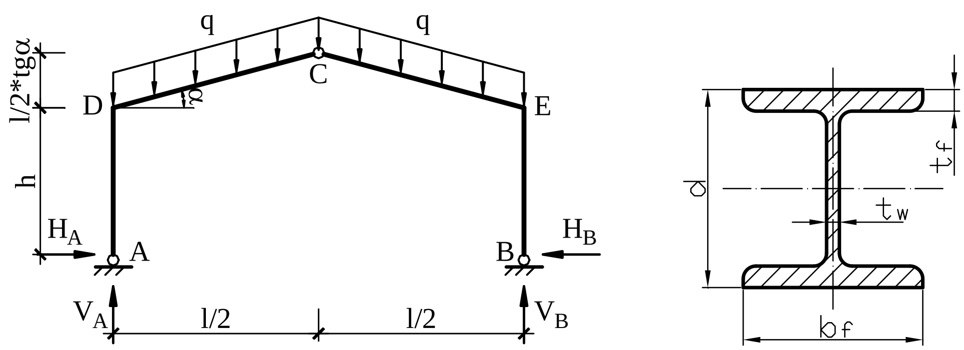
$$z_1 = -\beta = -\frac{m_Z - m_Y}{\sqrt{S_Z^2 + S_Y^2}} = -\frac{f_1(m_{Z1}, m_{Z2}, ...m_{Zn}) - f_2(m_{Y1}, m_{Y2}, ...m_{Yk})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f_1}{\partial Z_i}\right)_m^2 S_{Zi}^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f_2}{\partial Y_i}\right)_m^2 S_{Yi}^2}} \qquad (2.10)$$

Mặt khác, khi tính toán theo độ bền, ta sẽ xác định độ bền theo sự liên hệ giữa ứng suất tính toán $\sigma$ và ứng suất giới hạn $\sigma_{\lim}$ mà nếu $\sigma > \sigma_{\lim}$ thì hỏng hóc sẽ xảy ra. Các giá trị $\sigma$ và $\sigma_{\lim}$ được khảo sát như là các đại lượng ngẫu nhiên phân phối theo quy luật chuẩn, được đánh giá bằng các đặc trưng số sau đây: giá trị ứng suất trung bình $\overline{\sigma}$ và $\overline{\sigma}_{\lim}$; sai lệch bình phương trung bình $S_\sigma$ và $S_{\sigma\lim}$. Xác suất làm việc không hỏng theo tiêu chuẩn bền R được xác định như là xác suất sao cho giá trị ứng suất tính toán $\sigma$ nhỏ hơn giá trị ứng suất giới hạn $\sigma_{\lim}$ tức là $P(\sigma < \sigma_{\lim})$. Giá trị xác suất làm việc không hỏng R tra bảng theo điểm phân vị $z_1$ hoặc chỉ số độ tin cậy $\beta$:

$$z_1 = -\beta = -\frac{\overline{\sigma}_{\lim} - \overline{\sigma}}{\sqrt{S_{\sigma\lim}^2 + S_\sigma^2}} \qquad (2.11)$$

**3. Ví dụ tính toán**

Tính toán thiết kế hệ ba khớp bằng thép CT3 theo lý thuyết độ tin cậy với xác suất làm việc không hỏng R = 0,999; tiết diện chữ I (có biên dạng Wx8x67), chịu tác dụng tải trọng phân bố đều q = 5,4 kN/m, nhịp l = 45 m, chiều cao cột h = 15 m, góc nghiêng α = $15^0$.




*Hình 1. Sơ đồ kết cấu.*

Từ sơ đồ kết cấu chịu tải như trên ta có các thành phần phản lực:

$$V_A = V_B = \frac{q.l}{2.\cos\alpha} \text{ (kN)} \qquad (3.1)$$

$$H_A = H_B = \frac{q.l^2}{8.h.\cos\alpha + 4.l.\sin\alpha} \text{ (kN)} \qquad (3.2)$$

Tiết diện thanh DA là tiết diện nguy hiểm, có khả năng xảy ra hư hỏng, nội lực trong thanh DA được xác định như sau:

$$M = H_A.h = \frac{q.l^2.h}{8.h.\cos\alpha + 4.l.\sin\alpha} \text{ (kNm)} \qquad (3.3)$$

$$N = -V_A = -\frac{q.l}{2.\cos\alpha} \text{ (kN)} \qquad (3.4)$$

Như vậy, ứng suất gây nén lớn nhất trong thanh DA được xác định như sau:

$$\sigma = \left| \frac{N}{A} - \frac{M}{\mathrm{W}} \right| \text{(kN/m}^2\text{)} \quad (3.5)$$

Trong đó: *A* là diện tích mặt cắt ngang tiết diện:

$$A = 2b_f t_f + (d - 2t_f)t_{\mathrm{w}} \text{ (m}^2\text{)} \quad (3.6)$$

W là mômen kháng uốn của tiết diện:

$$W = \frac{I}{d/2} = \frac{b_f d^3 - (b_f - t_{\mathrm{w}})(d - 2t_f)^3}{6d} \text{ (m}^3\text{)} \quad (3.7)$$

Với biên dạng thép chữ I (Wx8x67) ta có: $\dfrac{b_f}{t_f} = 0,88; \dfrac{d}{t_{\mathrm{w}}} = 15,7; \dfrac{b_f}{d} = 0,92$

$$\Rightarrow b_f = 0,92d; t_f = 0,1036d; t_{\mathrm{w}} = 0,0637d$$

Do đó: $A = 0,2411d^2(m^2)$ ; $W = 0,0822d^3(m^3)$

Giả sử sai lệch bình phương trung bình của kích thước d là $S_d = 0,01\overline{d}$, khi đó các giá trị trung bình $\overline{A}$, $\overline{W}$ và sai lệch bình phương trung bình $S_A$, $S_W$ được xác định như sau:

$$\overline{A} = 0,2411\overline{d}^2(m^2)\text{ ; } \overline{W} = 0,0822\overline{d}^3(m^3)$$

$$S_A = \frac{\partial \overline{A}}{\partial \overline{d}} S_d = 0,2411.2\overline{d}.0,01\overline{d} = 0,004822\overline{d}^2(m^2)$$

$$S_{\mathrm{w}} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{d}} S_d = 0,0822.3\overline{d}^2.0,01\overline{d} = 0,002466\overline{d}^3(m^3)$$

Giả sử các số liệu ban đầu:

$$\overline{q} = 5,4kN/m; S_q = 0,54kN/m; \overline{l} = 45m; S_l = 0,9m; \overline{h} = 15m; S_h = 0,3m; \overline{\alpha} = 15^0; S_\alpha = 1,5^0$$

Từ công thức (3.3) ta xác định giá trị trung bình mômen uốn $\overline{M}$ và sai lệch bình phương trung bình $S_M$ như sau:

$$\overline{M} = \frac{\overline{q}.\overline{l}^2.\overline{h}}{8.\overline{h}.\cos\overline{\alpha} + 4.\overline{l}.\sin\overline{\alpha}} = 1009(kNm)$$

$$S_M = \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{M}}{\partial \overline{q}}\right)^2 S_q^2 + \left(\frac{\partial \overline{M}}{\partial \overline{l}}\right)^2 S_l^2 + \left(\frac{\partial \overline{M}}{\partial \overline{h}}\right)^2 S_h^2 + \left(\frac{\partial \overline{M}}{\partial \overline{\alpha}}\right)^2 S_\alpha^2} = 109,352(kNm)$$

Từ công thức (3.4) ta xác định giá trị trung bình lực dọc $\overline{N}$ và sai lệch bình phương trung bình $S_N$ như sau:

$$\overline{N} = -\frac{\overline{q}.\overline{l}}{2.\cos\overline{\alpha}} = -125,786(kN)$$

$$S_N = \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial \overline{q}}\right)^2 S_q^2 + \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial \overline{l}}\right)^2 S_l^2 + \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial \overline{\alpha}}\right)^2 S_\alpha^2} = 12,858(kN)$$

Theo công thức (3.5) ta xác định giá trị trung bình ứng suất $\overline{\sigma}$ và sai lệch bình phương trung bình $S_\sigma$ như sau:

$$\overline{\sigma} = \left|\frac{\overline{N}}{\overline{A}} - \frac{\overline{M}}{\overline{W}}\right| = \frac{125,786}{0,2411\overline{d}^2} + \frac{1009}{0,0822\overline{d}^3}(kN/m^2)$$

$$S_\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\overline{N}}\right)^2 S_N^2 + \left(\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\overline{A}}\right)^2 S_A^2 + \left(\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\overline{M}}\right)^2 S_M^2 + \left(\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\overline{W}}\right)^2 S_W^2} = \sqrt{\frac{2953,03}{\overline{d}^4} + \frac{1905348,18}{\overline{d}^6}}(kN/m^2)$$

Tra sổ tay cơ học kết cấu, ta được ứng suất chịu nén giới hạn đối với thép CT3 là $\sigma_b = 210000(kN/m^2)$. Chọn sự sai lệch ngẫu nhiên ở mức 10%, ta có sai lệch bình phương trung bình của ứng suất giới hạn là $S_{\sigma b} = 21000(kN/m^2)$.

Tương ứng với xác suất làm việc không hỏng R = 0,999 tra bảng phụ lục 1 (trang 303, [3]) ta có $z_1$ = -3,09. Từ công thức (2.11) ta có:

$$z_1 = -\frac{\overline{\sigma}_b - \overline{\sigma}}{\sqrt{S_{\sigma b}^2 + S_\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow -3,09 = -\frac{210000 - \left(\frac{125,786}{0,2411\overline{d}^2} + \frac{1009}{0,0822\overline{d}^3}\right)}{\sqrt{21000^2 + \frac{2953,03}{\overline{d}^4} + \frac{1905348,18}{\overline{d}^6}}}$$

Giải phương trình theo $\overline{d}$ tìm được 2 nghiệm: $\overline{d}_1 = 0,4569m$ ứng với xác suất không hỏng R = 0,999 và $\overline{d}_2 = 0,3305m$ ứng với xác suất không hỏng R = 0,001. Vậy ta chọn **d = 0,4569m**.

Nếu giải bài toán thiết kế này theo phương pháp truyền thống với giá trị ứng suất cho phép $[\sigma]$ thì phụ thuộc vào hệ số an toàn ta có các kết quả theo bảng sau:

***Bảng 1. Kết quả tính toán d theo hệ số an toàn.***

| Thông số | n = 1 | n = 2 | n = 3 |
|---|---|---|---|
| $[\sigma]$, kN/m$^2$ | 210000 | 105000 | 70000 |
| d, m | **0,3902** | **0,4924** | **0,5642** |

## 4. Kết luận

Từ kết quả tính toán ở ví dụ trên ta thấy rằng, phương pháp tính toán kết cấu theo lý thuyết độ tin cậy sẽ cho kết quả tối ưu so với phương pháp truyền thống (sử dụng hệ số an toàn), trong đó có xét cả đến các ảnh hưởng của quá trình ngẫu nhiên, nghĩa là xét đến những sai số ngẫu nhiên đối với các tham số tính toán (như tải trọng, kích thước hình học...)

### TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1]. Achintya Haldar & Sankaran Mahadevan, *Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design,* John Wiley & sons, Inc, New York, 2000.

[2]. Phan Văn Khôi, *Cơ sở đánh giá độ tin cậy,* NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2001.

[3]. Nguyễn Hữu Lộc, *Thiết kế & phân tích hệ thống cơ khí theo độ tin cậy*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2005.

[4]. Tống Đình Quỳ, *Giáo trình xác suất thống kê*, NXB Giáo dục, 1999.


***Người phản biện: TS. Đào Văn Tuấn***