BÀI TOÁN UỐN TẤM VÀ SỰ HỘI TỤ, ĐỘ CHÍNH XÁC CỦA PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

PLATE BENDING PROBLEM AND THE CONVERGENCE, EXACTITUDE OF FINITE ELEMENT METHOD

PGS. TS. NGUYỄN VĂN NGỌC
NCS. BÙI QUỐC BÌNH
Khoa Công trình thủy, Trường ĐHHH

Tóm tắt

Phương pháp "phần tử hữu hạn" (PPPTHH) chỉ là một phương pháp tính gần đúng do ảnh hưởng của việc phân chia phần tử và làm tròn số. Từ kết quả phân tích bài toán uốn tấm và một số tài liệu tham khảo, bài báo này trình bày một số vấn đề về sự hội tụ và độ chính xác của phương pháp này.

Abstract

The “Finite Element Method's” a approximation method. It depends on mashing and rounding. Based on plate bending analysis and references, this article presents some problems of convergence and exactitude of that method.

1. Đặt vấn đề

Phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp vạn năng và rất hiệu quả để tính kết cấu. Sử dụng PPPTHH người ta có thể giải được những bài toán phức tạp và thậm chí là không giải được bằng phương pháp khác [1]. Phạm vi ứng dụng của PPPTHH ngày càng được mở rộng và trở thành công cụ quan trọng để nghiên cứu nhiều lĩnh vực khác nhau.

Thực chất PPPTHH chỉ là một phương pháp tính gần đúng vì trong quá trình tính toán kết cấu thực tế có bậc tự do vô hạn đã được thay thế bằng một mô hình tính toán gồm nhiều PTHH chỉ liên kết với nhau ở một số hữu hạn các điểm nút. Do đó, việc tính toán thường có sai số là đương nhiên. Ngoài ra, trong khi tính toán do việc làm tròn số lẻ ta còn mắc thêm sai số.

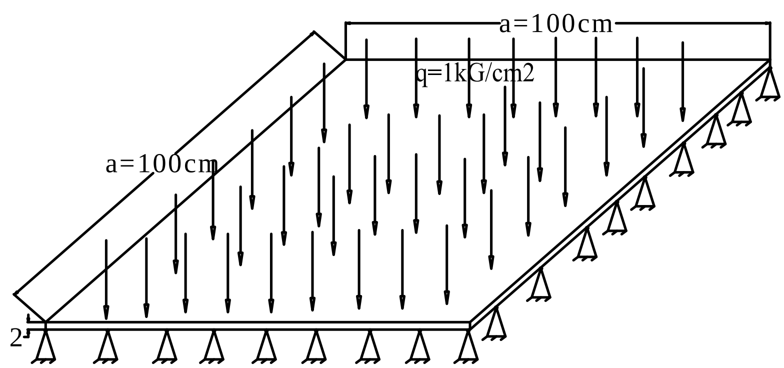
Sai số của PPPTHH phụ thuộc các yếu tố sau:

- Cách chọn quy luật biến thiên chuyển vị trong các PPPTHH;
- Cách chọn hệ tọa độ nút tổng quát;
- Mức độ chính xác của việc quy đổi tải trọng ngoài thành các lực đặt tại nút;
- Hình dạng và kích thước của phần tử hữu hạn.

Chúng ta sẽ xem xét các yếu tố trên qua một ví dụ cụ thể.

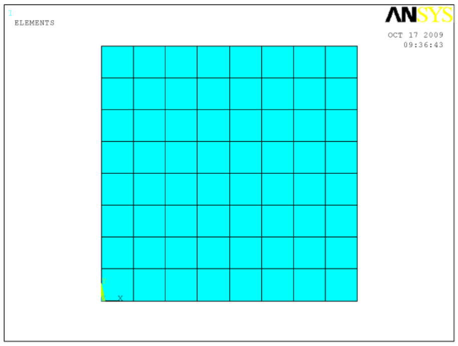
2. Bài toán uốn tấm

Xét một tấm thép hình vuông có cạnh a=100cm; độ dày t=2cm, môđun đàn hồi $E=2.1x10^6 kG/cm^2$, hệ số Poisson ν=0.3; tựa bản lề 4 cạnh chịu tải trọng phân bố đều $q=1kG/cm^2$ như hình 1.

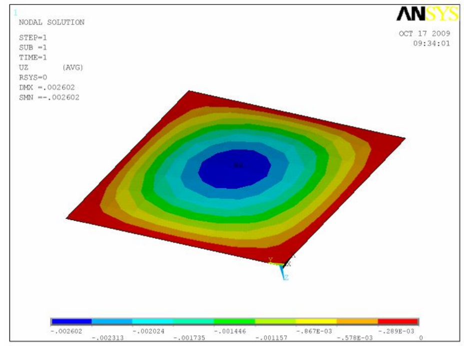


Hình 1. Bài toán nghiên cứu.

Tính độ võng tại giữa tấm theo 2 phương pháp: phương pháp giải tích sử dụng chuỗi lượng giác kép của Navier [2] và phương pháp phần tử hữu hạn bằng phần mềm ANSYS Ver. 10 [4]; kết quả trình bày trong bảng 1. So sánh kết quả giải bằng PPPTHH với kết quả giải bằng giải tích.



Hình 2. Lưới 8x8 phần tử tạo bởi Ansys.



Hình 3. Kết quả tính độ võng trường hợp lưới 8x8.

Bảng 1. Kết quả tính toán độ võng tại giữa tấm $w_{\max}$ (m).

Phương pháp tính	Số lượng phần tử	$w_{\max}$ (m)	Chênh lệch (%)
Giải tích - sử dụng chuỗi lượng giác kép Navier [2]	$w_{\max} = 0.00416\dfrac{qa^4}{D}$ với độ cứng trụ khi uốn $D = \dfrac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$	0.002704	-----
PPPTHH sử dụng Ansys	Lưới 8x8	0.002602	3.77
	Lưới 16x16	0.002631	2.70
	Lưới 32x32	0.002638	2.44
	Lưới 64x64	*0.00264*	*2.37*
	Lưới 128x128	*0.00264*	*2.37*

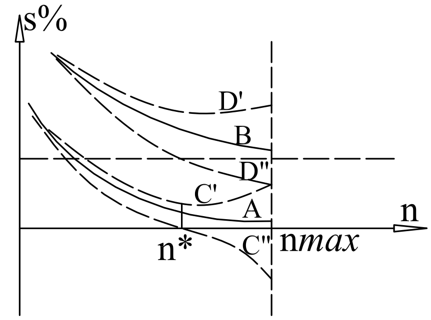
Khi tăng lưới từ 64x64 lên 128x128 phần tử, kết quả tính toán không thay đổi.

3. Một số phân tích về sự hội tụ và độ chính xác của PPPTHH

Từ kết quả phân tích trên cho thấy rằng: nếu lựa chọn được quy luật biến thiên chuyển vị (hoặc ứng suất) bên trong PTHH thỏa mãn một cách đầy đủ điều kiện liên tục về mặt chuyển vị tại chỗ phân giới (điểm, đường hoặc mặt) giữa các PTHH, thì khi tăng thêm số lượng PTHH, chắc chắn kết quả tính toán sẽ càng chính xác. Trái lại, nếu quy luật biến đổi chuyển vị đã lựa chọn không đảm bảo thỏa mãn một cách chặt chẽ điều kiện liên tục về mặt chuyển vị tại chỗ phân giới giữa các PTHH, thì khi tăng thêm số lượng PTHH chưa chắc kết quả tính toán đã chính xác hơn. Do đó trong tính toán thực hành ta nên chú ý tránh sử dụng các ma trận độ cứng thiết lập dựa trên các giả thiết về quy luật biến thiên chuyển vị (hoặc ứng suất) bên trong PTHH không đảm bảo thỏa mãn các điều kiện liên tục về chuyển vị tại chỗ phân giới giữa các PTHH.

Khi tăng số lượng PTHH ta sẽ làm tăng sai số do làm tròn các số lẻ. Sở dĩ như thế là vì khi tăng số lượng PTHH, số lượng phép tính sẽ tăng rất nhiều, mặt khá do kích thước của phhh giảm đi làm cho việc xác định chuyển vị nút sẽ kém chính xác hơn.

Hình 4 [1] cho ta thấy rõ quy luật biến thiên sai số S (tính theo phần trăm) theo số PTHH n của hệ. Đường cong A trên hình vẽ tương ứng với khi tính toán ta đã sử dụng ma trận độ cứng thiết lập trên giả thiết về quy luật biến thiên chuyển vị trong PTHH thỏa mãn một cách đầy đủ các điều kiện liên tục về chuyển vị ở tại các chỗ phân giới giữa các PTHH, nghĩa là kết quả tính toán của PPPTHH đảm bảo hội tụ đến lời giải chính xác của lý thuyết đàn hồi (hoặc sai số không đáng kể) khi ta tăng số lượng PTHH lên. Đường cong B trên hình vẽ tương ứng với khi tính toán ta đã sử dụng ma trận độ cứng thiết lập theo giả thiết về quy luật biến thiên chuyển vị trong PTHH không đảm bảo thỏa mãn một cách chặt chẽ các điều kiện liên tục về chuyển vị ở tại chỗ phân giới giữa các PTHH, nghĩa là dù cho có tăng số lượng PTHH đến đâu cũng không thể đảm bảo hội tụ đến lời giải chính xác của thuyết đàn hồi được.



Hình 4. Quan hệ giữa quy luật biến thiên sai số S% và số PTHH n của hệ.

Các đường cong C' và D' biểu thị sai số tổng cộng trong trường hợp sai số do làm tròn số lẻ có cùng dấu với sai số gây ra sự rời rạc hóa bởi mô hình tính toán. Còn các đường cong C'' và D'' biểu thị sai số tổng cộng trong trường hợp sai số do làm tròn số lẻ có dấu ngược với sai số gây ra do sự rời rạc hóa. Hình vẽ cho ta kết luận được rằng không phải lúc nào ta cũng nên chia kết cấu ra thành một số cực đại PTHH n*max*, bởi vì sai số tổng cộng nhỏ nhất sẽ tương ứng với khi n = n* < n*max*. (n*max* là số lượng PTHH do bộ nhớ của máy tính khống chế).

Trong thực tế tính toán, người ta không có cơ sở nào để xác định số PTHH tối ưu n* tương ứng với sai số tổng cộng nhỏ nhất. Tuy nhiên cần lưu ý rằng, việc lựa chọn quy luật biến thiên chuyển vị trong PTHH để thiết lập ma trận độ cứng của PTHH có hợp lý hay không sẽ quyết định kết quả tính toán theo PPPTHH có chắc chắn hội tụ đến lời giải chính xác hay không.

Muốn đảm bảo cho kết quả tính theo PPPTHH chắc chắn hội tụ đến lời giải chính xác, việc lựa chọn quy luật biến thiên chuyển vị trong PTHH bắt buộc phải thỏa mãn các tiêu chuẩn sau đây:

1. Nếu xem PTHH là vật rắn tuyệt đối thì các số gia của các chuyển vị nút phải không được gây ra sự thay đổi trạng thái ứng suất bên trong phần tử;

2. Việc giảm bớt kích thước của các PTHH phải dẫn đến kết quả trạng thái ứng suất và biến dạng bên trong phần tử là hằng số;

3. Quy luật biến thiên chuyển vị phải lựa chọn sao cho biến dạng dọc theo đường (hoặc mặt) phân giới giữa các PTHH phải có giá trị hữu hạn. Điều kiện này đòi hỏi điều kiện liên tục về chuyển vị giữa các PTHH phải thỏa mãn.

Chẳng hạn, khi giải bài toán phẳng của thuyết đàn hồi, biến dạng dọc theo đường phân giới được biểu thị theo đạo hàm cấp một của chuyển vị đối với các tọa độ cho nên ở đây chỉ cần đảm bảo thỏa mãn điều kiện liên tục về chuyển vị tại các nút. Trái lại, khi giải bài toán uốn tấm, biến dạng dọc theo đường phân giới giữa các PTHH được xác định theo đạo hàm cấp hai của độ võng cho nên độ võng và đạo hàm cấp một của nó phải thỏa mãn điều kiện liên tục dọc theo đường phân giới giữa các PTHH [3].

Nếu các điều kiện nêu trên được thỏa mãn thì chắc chắn kết quả tính theo PPPTHH sẽ hội tụ đến lời giải chính xác của thuyết đàn hồi nếu ta tăng thêm số lượng PTHH, tức là sai số do sự rời rạc hóa sơ đồ tính sẽ tiến tiệm cận đến giá trị không. Cần lưu ý rằng khi sử dụng PPPTHH trong thực tế, người ta thường hay sử dụng các ma trận độ cứng thiết lập dựa theo giả thiết quy luật biến đổi chuyển vị trong PTHH không thỏa mãn điều kiện thứ 3 nêu trên. Thực ra điều kiện 3 này chỉ được thỏa mãn khi điều kiện 2 được thỏa mãn, đồng thời phải tăng số PTHH lên rất nhiều tức là tăng độ phức tạp của bài toán, thời gian giải lâu hơn thậm chí không giải được nếu tài nguyên máy tính không cho phép.

Một số tài liệu đã chứng minh được rằng [1], đối với những bài toán quy luật chuyển vị được biểu thị bằng một phương trình cấp 2m, nếu dùng PPPTHH để giải và ta mô tả sự làm việc của kết cấu bằng một đa thức bậc p biểu thị quy luật biến thiên chuyển vị bên trong phần tử thì ta sẽ phạm phải sai số tương đối sau đây:

$$\delta = \left(\frac{a}{l}\right)^{2(p+1-m)} \tag{1}$$

trong đó a là kích thước đặc trưng cho PTHH; *l* là kích thước của kết cấu.

Giả sử bên trong phần tử quy luật biến thiên chuyển vị được biểu diễn bằng đa thức bậc p. Khi đó, theo định lý Taylo, kết quả tính toán theo PPPTHH sẽ gần đúng bằng nghiệm chính xác của lý thuyết đàn hồi với sai số tương đối bằng $\left(\frac{a}{l}\right)^{p+1-m}$. Trong những bài toán quy luật chuyển vị được biểu thị bằng một phương trình cấp 2m thì biểu thức của năng lượng sẽ chứa các đạo hàm cấp m. Những giá trị đạo hàm này được tính một cách gần đúng với sai số tương đối là $\left(\frac{a}{l}\right)^{p+1-m}$; và do trong biểu thức tổng quát của năng lượng có chứa các số hạng bình phương của các đạo hàm đó cho nên sai số tương đối khi xác định năng lượng sẽ chính là $\left(\frac{a}{l}\right)^{2(p+1-m)}$. Thế mà xác định năng lượng chính là xác định ma trận độ cứng, cho nên ta có thể nói rằng kết quả tính đã dược xác định với sai số tương đối bằng $\left(\frac{a}{l}\right)^{2(p+1-m)}$. Điều này cho phép ta kết luận rằng: *bằng cách giảm bớt kích thước của các PTHH đến mức đủ nhỏ, về mặt lý thuyết (bỏ qua sai số do làm tròn số lẻ) ta có thể đạt được mức độ chính xác yêu cầu tùy ý.*

Bây giờ ta hãy phân tích sai số do việc làm tròn số lẻ kỹ hơn.

Khi giải hệ phương trình đại số tuyến tính.

$$\left[\overline{K}\right]\left\{\overline{q}\right\} = \left\{\overline{P}\right\} \tag{2}$$

Ta sẽ mắc phải sai số do việc làm tròn số lẻ ở các khâu sau:

- Khi làm tròn các số liệu xuất phát trong ma trân độ cứng $\left[\overline{K}\right]$ và trong véctơ $\left\{\overline{P}\right\}$;
- Do việc tích luỹ sai số trong quá trình giải hệ phương trình.

Nếu dùng phương pháp chính xác để giải hệ n phương trình đại số tuyến tính thì phải thực hiện số phép tính nhân khổng lồ xấp xỉ bằng $\frac{n^3}{3}$. Do đó, khó mà đánh giá sai số do việc làm tròn số lẻ với một số lớn các phép tính nhân như vậy. Trái lại, người ta đã chứng minh được rằng khi dùng phương pháp khử Gauss để giải hệ thống n phương trình đại số tuyến tính n ẩn số, nếu muốn có nghiệm với độ chính xác đến u số lẻ thì khi viết các phần tử của ma trận, độ cứng $\left[\overline{K}\right]$ và của véc tơ $\left\{\overline{P}\right\}$ ta phải lấy độ chính xác đến u + r số lẻ, trong đó giá trị r xác định theo hệ thức sau:

$$r = \lg n \tag{3}$$

Chú ý rằng kết quả vừa nêu là giới hạn trên tương ứng với trường hợp bất lợi nhất. Thực ra ta có thể sử dụng kết quả tìm được bằng phương pháp thống kê như sau:

$$r = \lg \sqrt{n} \tag{4}$$

Bây giờ ta hãy xét đến nhân tố cuối cùng gây ảnh hưởng đến sai số của kết quả tính. Khi giải hệ phương trình đại số tuyến tính n ẩn ta có thể gặp khó khăn do tính chất không ổn định của nghiệm, tức là ta có thể gặp hiện tượng sau: Giá trị của các phần tử trong ma trận độ cứng $\left[\overline{K}\right]$ có điều kiện xấu, và goi ma trận nghịch đảo $\left[\overline{K}\right]^{-1}$ là không ổn định. Tính chất này gây ảnh hưởng quan trọng đến sai số của kết quả tính, do đó cần phải khảo sát chi tiết.

Để đánh giá tính chất không ổn định nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính n ẩn, ta có thể xét tỷ số:

$$\frac{\left|\overline{K}\right|}{\left|\overline{k}_{ik}^{\max}\right|^{n}} \tag{5}$$

trong đó $\left|\overline{K}\right|$ là định thức của hệ phương trình; $\overline{k}_{ik}^{\max}$ là giá trị lớn nhất của các phần tử trong số luỹ thừa bằng số ẩn số của hệ.

Nếu tỷ số này có giá trị càng lớn thì tính chất không ổn định nghiệm của hệ phương trình càng rõ rệt.

Tuy nhiên, khi dùng tỷ số (5) để đánh giá tính chất không ổn định nghiệm của hệ phương trình ta phải tính toán rất nhiều vì phải xác định giá trị của định thức $\left|\overline{K}\right|$.

Để thuận tiện hơn trong các tính toán thực hành người ta hay dùng số phổ (*spectrum*) $C_n\left(\overline{K}\right)$ của hiện tượng không ổn định nghiệm để đánh giá tính chất này. Người ta đã chứng minh được hệ thức liên hệ giữa số phổ $C_n\left(\overline{K}\right)$ với sai số tương đối δ của nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính n ẩn dưới dạng gần đúng sau đây:

$$\delta = \frac{|\delta q|}{q} = 10^{-V} C_n\left(\overline{K}\right) \tag{6}$$

trong đó V là số lẻ do máy tính điện tử sử dụng.

Như vậy nếu biết số lẻ V máy đã sử dụng trong quá trình tính toán và số phổ $C_n\left(\overline{K}\right)$ ta dễ dàng xác định được ngay sai số tương đối δ của nghiệm theo hệ thức (6). Số số lẻ V đã được ấn định dễ dàng trong khi thao tác máy tính điện tử, cho nên còn lại chỉ cần tìm $C_n\left(\overline{K}\right)$. Số phổ $C_n\left(\overline{K}\right)$ của hiện tượng không ổn định nghiệm được xác định theo hệ thức sau:

$$C_n\left(\overline{K}\right) = \frac{\lambda_{\max}^{k}}{\lambda_{\min}^{k}} \tag{7}$$

trong đó $\lambda_{\min}^{k}$ và $\lambda_{\max}^{k}$ lần lượt là các trị riêng cực tiểu và cực đại của ma trận độ cứng $\left[\overline{K}\right]$ xác định từ phương trình sau:

$$\left|\overline{K} - \lambda E\right| = 0 \tag{8}$$

Ta đã biết rằng việc xác định trị riêng λ cho một ma trận cấp cao hết sức phức tạp, cho nên trong thực tế người ta không xác định số phổ $C_n\left(\overline{K}\right)$ theo công thức (7) mà chỉ xác định giới hạn biến đổi của số phổ $C_n\left(\overline{K}\right)$ theo hệ bất đẳng thức sau:

$$\frac{\lambda_{\max}^{k}}{\lambda_1 \lambda_{\max}^{m} P} \le C_n\left(\overline{K}\right) \le \frac{\lambda_{\max}^{k} P}{\lambda_1 \lambda_{\min}^{m}} \tag{9}$$

Trong đó λ_1 là trị riêng nhỏ nhất của kết cấu; $\lambda_{\max}^{m}$, $\lambda_{\min}^{m}$ lần lượt là các trị riêng lớn nhất và nhỏ nhất của ma trận khối lượng của toàn kết cấu.

Khi dùng PPPTHH để giải một bài toán kết cấu cụ thể người ta dễ dàng xác định được các đại lượng trong hệ bất đẳng thức trên để từ đó đánh giá sai số [2].

4. Kết luận

Cùng với sự phát triển không ngừng của máy tính điện tử, PPPTHH ngày càng được sử dụng rộng rãi. PPPTHH được xem là một công cụ vạn năng và tiện lợi để giải quyết nhiều bài toán phức tạp cho các ngành xây dựng, giao thông, thủy lợi, chế tạo máy, kỹ thuật hàng không... Tuy nhiên, do các đặc điểm riêng về tính hội tụ và độ sai số, các bài toán cần có các lựa chọn phù hợp về kiểu và số lượng phần tử, để giảm thiểu độ phức tạp của bài toán (thời gian giải ngắn hơn) mà vẫn đảm bảo độ chính xác yêu cầu.

Ghi chú: Bài báo này dùng dấu "." để phân cách giữa phần nguyên và phần thập phân trong biểu diễn số.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheung, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, Mc Graw-Hill, 1970.

[2] O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, Mac Graw - Hill, 1977.

[3] D. Durban, D. Givoli, J.G. Simmonds, *Advances in the Mechanics of Plates and Shells*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[4] Đinh Bá Trụ, Hoàng Văn Lợi, *Hướng dẫn sử dụng Ansys*, Học viện kỹ thuật quân sự, 2003.

Người phản biện: TS. Đào Văn Tuấn