TỔNG CỦA MỘT LỚP CHUỖI SỐ
SUM OF ONE CLASS OF SERIES

TS. PHẠM VĂN MINH
Bộ môn Toán, Trường ĐHHH

Tóm tắt

Bài báo này đưa ra cách tính tổng của lớp chuỗi số dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ , \quad (1)$$

trong đó $u_n = \frac{p_n}{q_n}$, $q_n = \prod_{i=1}^{m}(n-\alpha_i),\ m \ge 2,\ \alpha_i \in \mathbb{R} \setminus N^* \forall i = \overline{1,m}$, $\alpha_{i+1} - \alpha_i \in N^* \forall i = \overline{1,m-1}$,

p_n *là đa thức bậc không quá* $m-2$ *của* n.

Abstract

This article provides a method to calculate the sum of series of the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ , \quad (1)$$

where $u_n = \frac{p_n}{q_n}$, $q_n = \prod_{i=1}^{m}(n-\alpha_i),\ m \ge 2,\ \alpha_i \in \mathbb{R} \setminus N^* \forall i = \overline{1,m}$, $\alpha_{i+1} - \alpha_i \in N^* \forall i = \overline{1,m-1}$, p_n

is a polynomial of degree less than or equal to $m-2$ *of* n.

Xét bài toán: khảo sát sự hội tụ và tính tổng của chuỗi số sau nếu nó hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ , \tag{1}$$

trong đó $u_n = \frac{p_n}{q_n}$, $q_n = \prod_{i=1}^{m}(n-\alpha_i),\ m \ge 2,\ \alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_{i+1} - \alpha_i \in N^* \forall i = \overline{1,m-1},\ n - \alpha_i \ne 0$

$\forall i = \overline{1,m}$,, $\forall n \in N^*$, p_n là đa thức bậc không quá $m-2$ của n.

Đặt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \ . \tag{2}$$

Vì u_k là phân thức thực sự của k nên tồn tại duy nhất biểu diễn

$$u_k = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{k-\alpha_i} \ . \tag{3}$$

Từ (3) suy ra

$$\frac{kp_k}{q_k} = ku_k = \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{k}{k-\alpha_i} \ .$$

Cho k dần đến vô cực, vì kp_k là đa thức bậc không quá $m-1$, q_k là đa thức bậc m của k nên $\frac{kp_k}{q_k} \to 0$. Mặt khác, $\frac{k}{k-\alpha_i} \to 1$ khi $k \to \infty$, ta suy ra

$$\sum_{i=1}^{m} c_i = 0 . \tag{4}$$

Thay (3) vào (2) ta có

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{k-\alpha_i}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-\alpha_i} . \tag{5}$$

Đặt

$$S_{ni} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-\alpha_i}, i = \overline{1, m} . \tag{6}$$

Từ (5) và (6) suy ra

$$S_n = \sum_{i=1}^{m} c_i S_{ni} . \tag{7}$$

Từ (6) ta có

$$S_{ni} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-(\alpha_i-\alpha_1)-\alpha_1} .$$

Trong biểu thức của S_{ni} đặt $k-(\alpha_i-\alpha_1)=l$, ta có

$$S_{ni} = \sum_{l=1-(\alpha_i-\alpha_1)}^{n-(\alpha_i-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1} .$$

Suy ra với $n > \alpha_m - \alpha_1$ ta có

$$S_{n1} = \sum_{l=1}^{n-(\alpha_m-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1} + \sum_{l=n-(\alpha_m-\alpha_1)+1}^{n} \frac{1}{l-\alpha_1},\ S_{nm} = \sum_{l=1-(\alpha_m-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1} + \sum_{l=1}^{n-(\alpha_m-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1}, \tag{8}$$

và nếu $m > 2$ thì

$$S_{ni} = \sum_{l=1-(\alpha_i-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1} + \sum_{l=1}^{n-(\alpha_m-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1} + \sum_{l=n-(\alpha_m-\alpha_1)+1}^{n-(\alpha_i-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1} \forall i = \overline{2, m-1}. \tag{9}$$

Trường hợp $m = 2$ từ (7), (8) suy ra

$$S_n = c_1\left(\sum_{l=1}^{n-(\alpha_2-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1} + \sum_{l=n-(\alpha_2-\alpha_1)+1}^{n} \frac{1}{l-\alpha_1}\right) + c_2\left(\sum_{l=1-(\alpha_2-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1} + \sum_{l=1}^{n-(\alpha_2-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = (c_1+c_2)\sum_{l=1}^{n-(\alpha_2-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1} + c_1 \sum_{l=n-(\alpha_2-\alpha_1)+1}^{n} \frac{1}{l-\alpha_1} + c_2 \sum_{l=1-(\alpha_2-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1} .$$

Từ đẳng thức cuối cùng và (4) ta nhận được

$$S_n = c_1 \sum_{l=n-(\alpha_2-\alpha_1)+1}^{n} \frac{1}{l-\alpha_1} + c_2 \sum_{l=1-(\alpha_2-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1}$$

Cho n dần đến vô cực. Tổng $\sum_{l=n-(\alpha_2-\alpha_1)+1}^{n} \frac{1}{l-\alpha_1}$ có hữu hạn (cụ thể là $\alpha_2-\alpha_1$) số hạng, mỗi số hạng đều dần đến 0 vì $l-\alpha_1 \to \infty$ do $l-\alpha_1 \geq n-\alpha_2+1$, nên có giới hạn là 0. Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} S_n = c_2 \sum_{l=1-(\alpha_2-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1} .$$

Vậy trong trường hợp này chuỗi (1) hội tụ và có tổng là

$$S = c_2 \sum_{l=1-(\alpha_2-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1}$$

Trường hợp $m > 2$ từ (7), (8), (9) suy ra

$$S_n = c_1\left(\sum_{l=1}^{n-(\alpha_m-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1} + \sum_{l=n-(\alpha_m-\alpha_1)+1}^{n} \frac{1}{l-\alpha_1}\right) + c_m\left(\sum_{l=1-(\alpha_m-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1} + \sum_{l=1}^{n-(\alpha_m-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1}\right) +$$

$$+\sum_{i=2}^{m-1} c_i\left(\sum_{l=1-(\alpha_i-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1} + \sum_{l=1}^{n-(\alpha_m-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1} + \sum_{l=n-(\alpha_m-\alpha_1)+1}^{n-(\alpha_i-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \left(c_1 + \sum_{i=2}^{m-1} c_i + c_m\right)\sum_{l=1}^{n-(\alpha_m-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1} + c_1 \sum_{l=n-(\alpha_m-\alpha_1)+1}^{n} \frac{1}{l-\alpha_1} + c_m \sum_{l=1-(\alpha_m-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1} +$$

$$+\sum_{i=2}^{m-1} c_i\left(\sum_{l=1-(\alpha_i-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1} + \sum_{l=n-(\alpha_m-\alpha_1)+1}^{n-(\alpha_i-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1}\right).$$

Kết hợp đẳng thức cuối với (4) ta được

$$S_n = c_1 \sum_{l=n-(\alpha_m-\alpha_1)+1}^{n} \frac{1}{l-\alpha_1} + c_m \sum_{l=1-(\alpha_m-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1} + \sum_{i=2}^{m-1} c_i\left(\sum_{l=1-(\alpha_i-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1} + \sum_{l=n-(\alpha_m-\alpha_1)+1}^{n-(\alpha_i-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1}\right)$$

Cho n dần đến vô cực. Tổng $\sum_{l=n-(\alpha_m-\alpha_1)+1}^{n} \frac{1}{l-\alpha_1}$ có hữu hạn (cụ thể là $\alpha_m - \alpha_1$) số hạng, mỗi số hạng đều dần đến 0 vì $l-\alpha_1 \to \infty$ do $l-\alpha_1 \geq n-\alpha_m+1$, nên có giới hạn là 0. Tổng $\sum_{l=n-(\alpha_m-\alpha_1)+1}^{n-(\alpha_i-\alpha_1)} \frac{1}{l-\alpha_1}$ với $2 \leq i \leq m-1$ có hữu hạn (cụ thể là $\alpha_m - \alpha_i$) số hạng, mỗi số hạng đều dần đến 0 vì $l-\alpha_1 \to \infty$ do $l-\alpha_1 \geq n-\alpha_m+1$, nên cũng có giới hạn là 0. Ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} S_n = c_m \sum_{l=1-(\alpha_m-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1} + \sum_{i=2}^{m-1} c_i \sum_{l=1-(\alpha_i-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1},$$

hay

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=2}^{m} c_i \sum_{l=1-(\alpha_i-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1}.$$

Vậy trong trường hợp này chuỗi (1) cũng hội tụ và có tổng là

$$S = \sum_{i=2}^{m} c_i \sum_{l=1-(\alpha_i-\alpha_1)}^{0} \frac{1}{l-\alpha_1}.$$

Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ và tính tổng của chuỗi số sau nếu nó hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Bài giải. Đặt $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Ta có

$$u_k = \frac{1}{4(k-\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})} = \frac{1}{4}.\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}.\frac{1}{k+\frac{1}{2}}.$$

Suy ra với $n > 1$ ta có

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}.\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}.\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\sum_{l=2}^{n+1}\frac{1}{l-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sum_{l=2}^{n}\frac{1}{l-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\sum_{l=2}^{n}\frac{1}{l-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}.\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}.\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ và có tổng là

$$S = \frac{1}{2}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh. *Bài tập toán cao cấp (tập hai)*. Nhà xuất bản Giáo dục, 2004

Người phản biện: TS. Hoàng Văn Hùng