NHẬN XÉT VỀ CÁC ÁNH XẠ GIAO HOÁN TRÊN MỘT TẬP TÙY Ý

remark on commutative interior maps of an arbitrary set

TS. HOÀNG VĂN HÙNG
Bộ môn Toán, Trường ĐHHH

Tóm tắt:

Tác giả chứng minh một định lí mô tả tính chất của một ánh xạ từ một tập tuỳ ý X vào chính nó xét như một phần tử của vị nhóm các ánh xạ trên X với phép hợp thành là tích các ánh xạ, thông qua tính chất của tập các điểm bất động của ánh xạ đó. Phát biểu chính xác của định lí như sau:

Giả sử g là một ánh xạ từ X vào X có tập điểm bất động là A (A có thể bằng rỗng). Nếu gm (m$\geq$ 2) có tập điểm bất động là B và B\A có đúng n phần tử (n $\geq$ 2) thì không tồn tại ánh xạ f từ X vào X sao cho f n! = g.

Tác giả cũng chỉ ra một số áp dụng của định lí trên.

Abstract:

The author has proved a theorem that describes a property of a map from an arbitrary set X into X, regarding a map as an element of the monoid of interior maps of X, via the property of its set of fixed points. More precisely, the theorem states :

Let g be a map from a set X into itself , the set A of fixed points of g may be empty. If the set B of fixed points of g^m (m$\geq$2) is not empty and B\A has exactly n elements (n$\geq$2) then there is no such a map f from X into X that $f^{n!}$ = g satisfied.

The author also has shown some applications of the theorem.

Cho X là một tập tuỳ ý khác rỗng, kí hiệu M(X) là tập tất cả các ánh xạ từ X vào X.Giả sử f,g là hai phần tử tuỳ ý của M(X), ta nói f,g là các ánh xạ giao hoán nhau nếu fg = gf, trong đó kí hiệu fg chỉ tích của các ánh xạ f và g. Khi đó fg = gf nghĩa là: f(g(x)) = g(f(x)) với mọi x thuộc X. Kí hiệu f^k chỉ tích của ánh xạ f với chính nó k lần, ta quy ước f^0 là ánh xạ đồng nhất và f^1 là chính ánh xạ f. Trong bài báo này chúng tôi chứng minh định lí sau:

Định lí 0 : Giả sử g là một ánh xạ từ X vào X có tập điểm bất động là A (A có thể bằng rỗng). Nếu g^m (m$\geq$2) có tập điểm bất động là B và B\A có đúng n phần tử (n $\geq$ 1) thì không tồn tại ánh xạ f thuộc M(X) sao cho $f^{n!}$ = g.

Nhận xét: Có một sự khác biệt nhỏ giữa phát biểu của định lí 0 và phát biểu kết quả trong tóm tắt của bài báo, đó là miền giá trị của n. Trên thực tế nếu giả thiết của định lí được thoả mãn, n không thể bằng 1.Nhưng đây chính là một áp dụng của định lí 0 và đó chính là dụng ý của tác giả khi phát biểu định lí 0 dưới dạng trên.

Nhắc lại rằng một điểm bất động của một ánh xạ h thuộc M(X) là một điểm x* có tính chất h(x*) =x*.

Trước hết ta chứng minh một số mệnh đề bổ trợ.

Mệnh đề 1: Nếu f, g là hai phần tử giao hoán nhau của M(X) và x* là một điểm bất động của g thì f(x*) cũng là một điểm bất động của g.

Chứng minh. Ta có: g(f(x*)) = f(g(x*)) = f(x*). Vậy f(x*) là một điểm bất động của g.

Mệnh đề 2: Giả sử f là một ánh xạ từ X vào chính nó và $h = f^k (1 \leq k \in \mathbf{N}^*)$, A là tập tất cả các điểm bất động của h (A khác rỗng). Khi đó thu hẹp $f|_A$ của ánh xạ f trên tập A là một đơn ánh từ A vào A. Nói riêng, nếu A hữu hạn thì thu hẹp $f|_A$ là một song ánh.

Chứng minh. Rõ ràng fh = hf, vậy theo mệnh đề 1 ta có f(A)$\subset$ A. Nếu tồn tại các phần tử khác nhau a,b của A sao cho f(a) = f(b) thì f^{k-1}(f(a)) =f^{k-1}(f(b) hay cũng vậy a =h(a) =h(b) = b. Mâu thuẫn. Vậy f phải là một đơn ánh từ A vào A. Nếu A là tập hữu hạn thì một đơn ánh f trên A phải là một song ánh.

Mệnh đề 3: Giả thiết như mệnh đề 2, chỉ có điều A có thể bằng rỗng. Nếu B là tập các điểm bất động của h^p ($p \geq 2$) và B\A khác rỗng, thì thu hẹp của f lên B\A là một đơn ánh từ B\A vào B\A.

Chứng minh. Rõ ràng ta có $A \subset B$ và $h^p = f^{kp}$ nên áp dụng mệnh đề 2 ta suy ra thu hẹp của f lên B là một đơn ánh. Vậy chỉ cần chứng minh f ánh xạ B\A vào B\A. Nếu A bằng rỗng thì không có gì phải chứng minh.Giả sử trái lại, A khác rỗng và tồn tại $b \in B\backslash A$ sao cho $f(b) \in A$. Khi đó theo mệnh đề 1 ta có $b = h^p(b)= f^{kp}(b) = f^{kp-1}(f(b)) \in A$. Mâu thuẫn. Vậy f ánh xạ B\A vào B\A.

Hệ quả: Nếu B\A gồm n phần tử ($n \geq 1$) thì thu hẹp của f lên B\A là một phép thế của B\A.

Chứng minh định lí 0: Giả sử trái lại tồn tại ánh xạ f thuộc M(X) sao cho $f^{n!} = g$. Áp dụng hệ quả của mệnh đề 3 ta suy ra thu hẹp của f lên B\A là một phép thế của n phần tử. Bởi vì tập các phép thế của một tập hữu hạn gồm n phần tử là một nhóm gồm n! phần tử với phép hợp thành là tích các ánh xạ, mặt khác chu kì của mọi phần tử của một nhóm hữu hạn phải là ước của cấp của nhóm nên ta suy ra thu hẹp của $f^{n!}$ lên B\A phải là ánh xạ đồng nhất. Như vậy $g = f^{n!}$ giữ bất động các phần tử của B\A hay nói cách khác tập các điểm bất động của g chứa B, trong khi theo giả thiết tập các điểm bất động của g là A - tập con thực sự của B. Mâu thuẫn. Vậy không tồn tại ánh xạ f thuộc M(X) sao cho $f^{n!}=g$.

a sTẽ áp dụng định lí 0 để chứng minh một số khẳng định lí thú :

Mệnh đề 4: Nếu g là ánh xạ từ tập X vào X và tồn tại số nguyên dương $m \geq 2$ sao cho g^m có tập điểm bất động B chứa tập các điểm bất động A của g như một tập con thực sự thì B\A phải có không ít hơn 2 phần tử.

Chứng minh. Giả sử trái lại B\A chỉ có đúng một phần tử. Vì 1! =1 thì theo định lí 0 không tồn tại ánh xạ f từ X vào X sao cho $f^1 = f =g$ (*). Nhưng điều này vô lí, bởi vì rõ ràng f = g thoả mãn (*), vậy B\A phải có không ít hơn 2 phần tử.

Mệnh đề 5: Giả sử f là một phần tử của M(X). Nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho f^k có duy nhất một điểm bất động thì đó cũng chính là điểm bất động duy nhất của f.

Chứng minh. Vì tập điểm bất động của f luôn là một tập con của tập điểm bất động của f^k nên f không thể có nhiều hơn một điểm bất động. Nếu tập điểm bất động của f là rỗng thì mâu thuẫn với mệnh đề 4. Do đó f phải có duy nhất một điểm bất động và đó chính là điểm bất động của f^k.

Nhận xét : Khẳng định của mệnh đề 5 có thể suy ra từ một khẳng định tổng quát hơn như sau: nếu fg = gf và g có duy nhất một điểm bất động thì đó chính là điểm bất động chung (duy nhất) của f và g. Chứng minh khẳng định này suy ra từ mệnh đề 1 và tính duy nhất của điểm bất động của g.

Giả sử f là một toán tử tuyến tính trên một không gian véc tơ hữu hạn chiều V. Khi đó f cảm sinh một ánh xạ F trên tập các không gian con của V: F đặt tương ứng không gian con S của V với không gian con f(S) của V. Ta nói không gian con S của V là một không gian con bất biến của f nếu f(S) = F(S) = S (chú ý rằng định nghĩa này hơi khác với định nghĩa về không gian con bất biến được đưa ra trong một số tài liệu về đại số, ở đó không gian con S được gọi là bất biến của f nếu $f(S) \subset S$). Như vậy một không gian con bất biến của f là một điểm bất động của ánh xạ F. Rõ ràng F^k được cảm sinh bởi f^k (k là số nguyên không âm). Ta kí hiệu không gian con không của V là O. Hiển nhiên là F(O) = O. Vậy tập các điểm bất động của F luôn khác rỗng. Không gian con O gọi là không gian con bất biến tầm thường của mọi toán tử tuyến tính f.

Ta nói toán tử tuyến tính f là luỹ linh nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho f^k là ánh xạ không.

Mệnh đề 6: Nếu toán tử tuyến tính f trên không gian véc tơ V với số chiều dương là luỹ linh thì f chỉ có không gian con bất biến tầm thường.

Chứng minh. Ánh xạ không chỉ có không gian con bất biến tầm thường nên khẳng định của mệnh đề 6 suy ra từ khẳng định của mệnh đề 5.

Mệnh đề 7: Giả sử A là ma trận vuông cấp 2 thực có 2 giá trị riêng thực phân biệt và đều âm. Khi đó không tồn tại ma trận vuông thực B sao cho $B^4 = A$.

Chứng minh. Giả sử trái lại, tồn tại một ma trận thực B sao cho $B^4 = A$. Đặt $C = B^2$ ta có $C^2 = A$. Khi đó các ma trận A,B,C đều không suy biến vì det(A) > 0. Ma trận C không thể có giá trị riêng thực, bởi vì nếu λ là một giá trị riêng thực của C thì $\lambda^2 \geq 0$ là một giá trị riêng của $C^2 = A$, trái với giả thiết. Gọi g là toán tử tuyến tính trên $\mathbf{R}^2$ trong cơ sở chính tắc có ma trận là C, khi đó trong cơ sở chính tắc g^2 có ma trận là A . Bởi vì C không có giá trị riêng thực và không suy biến nên g có đúng 2 không gian con bất biến là O và $\mathbf{R}^2$. A không suy biến và có 2 giá trị riêng phân biệt khác 0 nên g^2 có đúng 4 không gian con bất biến: 2 không gian con 1 chiều phân biệt, không gian O và không gian $\mathbf{R}^2$. Gọi f là toán tử tuyến tính trong cơ sở chính tắc có ma trận là B, khi đó ta có $f^2 = g$. Các ánh xạ cảm sinh trên tập các không gian con của $\mathbf{R}^2$ tương ứng là F, G = F^2, G^2. Các lí luận trên chứng tỏ G có 2 điểm bất động, G^2 có 4 điểm bất động. Vậy theo định lí 0, không tồn tại ánh xạ F trên tập các không gian con của $\mathbf{R}^2$ sao cho $F^{2!} = F^2 = G$. Mâu thuẫn. Do đó không tồn tại ma trận thực B sao cho $B^4 = A$.

Nhận xét: Lí luận thuần tuý đại số chỉ ra rằng không có ma trận thực B sao cho $B^2 = A$. Thực vậy, từ giả thiết suy ra rằng A chéo hoá được trên trường thực. Giả sử P là ma trận chéo hoá A và dạng đường chéo của A là:

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \ a \neq b, \ a < 0, b < 0.$$

Nếu tồn tại ma trận thực B sao cho $B^2 = A$, đặt $C = P^{-1}BP$ ta có: $C^2 = D$. Giả sử:

$$C = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \to C^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \beta(\alpha+\delta) \\ \gamma(\alpha+\delta) & \delta^2 + \beta\gamma \end{bmatrix} = D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có hệ:

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta\gamma = a \\ \beta(\alpha+\delta) = 0 \\ \gamma(\alpha+\delta) = 0 \\ \delta^2 + \beta\gamma = b \end{cases}$$

Không khó khăn có thể chứng tỏ rằng hệ trên không có nghiệm thực nếu $a < 0$, $b < 0$ và $a \neq b$ hoặc $ab < 0$. Tuy nhiên, nếu bỏ giả thiết $a \neq b$ ví dụ sau đây chứng tỏ có thể tồn tại ma trận thực B sao cho $B^2 = A$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Mệnh đề 8: Không tồn tại ánh xạ liên tục f từ **R** vào **R** sao cho f(f(x)) = -x với mọi x thuộc **R**.

Chứng minh. Hàm số y = -x chỉ có duy nhất một điểm bất động x = 0. Giả sử trái lại tồn tại ánh xạ liên tục f từ **R** vào **R** sao cho f(f(x)) = -x. Khi đó theo mệnh đề 5 f có duy nhất điểm bất động x = 0. Vậy $f(x) \neq x$ khi x khác 0. Ánh xạ $x \mapsto y = -x$ là đơn ánh, do đó f cũng phải là đơn ánh. Hơn nữa f là hàm lẻ: f(-x) = f(f(f(x))) = - f(x). Vì f liên tục trên **R** nên f phải là ánh xạ đơn điệu thực sự. Giả sử f đơn điệu tăng. Lấy x =1. Có 2 khả năng: f(1) > 1 hoặc f(1) < 1. Nếu f(1) > 1 thì – 1 = f(f(1)) > f(1) >1. Vô lí. Nếu f(1) < 1 thì -1 = f(f(1)) < f(1), - f(1) = f(-1)< f(f(1) = -1, do đó suy ra f(1) > 1, mâu thuẫn.

Nếu f đơn điệu giảm thì – f đơn điệu tăng và do f là hàm lẻ ta có: - f (-f(x)) = f(f(x)) = -x. Như vậy áp dụng lí luận trên cho – f ta lại suy ra mâu thuẫn. Do đó không tồn tại ánh xạ liên tục f sao cho f(f(x))=-x với mọi x thuộc **R**.

Nhận xét: Mệnh đề 8 là bài toán 1.2 chương X trong [2].

Mệnh đề 9: Cho p(x) là hàm số thực xác định trên **R**, nếu phương trình p(p(x)) = x có nhiều hơn phương trình p(x) = x đúng 2 nghiệm thì không tồn tại hàm thực f(x) xác định trên **R** sao cho f(f(x)) = p(x).

Chứng minh. Xét ánh xạ g: $\mathbf{R} \ni x \mapsto p(x) \in \mathbf{R}$. Từ giả thiết suy ra rằng tập điểm bất động B của g^2 nhiều hơn tập điểm bất động A của g đúng 2 phần tử. Áp dụng trực tiếp định lí 0 ta suy ra không tồn tại ánh xạ f từ **R** vào **R** sao cho $f^2 = g$.

Ví dụ (xem [1], bài toán 114 và [2] bài toán 1.2 chương X): Xét hàm $p(x) = x^2 - q$ ($q > 1$). Khi đó phương trình $p(x) = x$ có 2 nghiệm phân biệt và phương trình $p(p(x)) = x$ có 4 nghiệm phân biệt . Do đó không tồn tại hàm thực $f(x)$ xác định trên **R** sao cho $f(f(x)) = p(x)$. Việc kiểm tra phương trình $p(p(x))= x$ có 4 nghiệm dành cho bạn đọc.

TÀI LIỆU THAM KHẢO:

[1]. Nguyễn Quý Dy, Nguyễn Văn Nho, Vũ Văn Thoả. Tuyển tập 200 bài thi vô địch toán, tập 3: Giải tích. Nhà xuất bản Giáo dục, 2002.

[2]. Б.М. Макаров, М.Г. Голузина, А.А. Лодкин, А.Н. Подкорытов. Избранные задачи по вещественному анализу. Москва “наука”. Главная редация физико-математической литературы.1992

Người phản biện : TS. Phạm Văn Minh