THIẾT KẾ BỘ ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU CHO CƠ CẤU NÂNG CỦA CẦU TRỤC
DESIGN OPTIMAL CONTROL FOR LIFTING MECHANISM OF BRIDGE CRANE

KS. HOÀNG VĂN NAM
Viện KHCS, Trường ĐHHH

Tóm tắt

Cơ cấu nâng của cầu trục là một trong những cơ cấu tiêu tốn nhiều năng lượng nhất. Xét về mặt kinh tế, trong khi thiết kế cơ cấu, ngoài đảm bảo độ bền, độ tin cậy, đôi khi người ta còn chú trọng đến tính tối ưu về tiêu tốn năng lượng của cơ cấu. Bài báo này giới thiệu về một phương pháp thiết kế bộ điều khiển tối ưu (BĐKTU) cho cơ cấu nâng cầu trục, trên cơ sở phương trình RICCATI và cách giải phương trình RICCATI bằng phương pháp số trong matlab.

Abstract

Lifting mechanism of bridge crane is one of the most power – consuming ones in term of economy, not only designers compute strength, stability but they also sometimes take into account optimality on power expenditure of the mechanism. This paper introduces a method to design a optimal control for lifting mechanism of bridge crane based on RICCATI equation and solution to the equation by numerical method using matlab software.

1. Đặt vấn đề

Trong quá trình làm việc của cơ cấu nâng (*Hình1*), ở giai đoạn đầu khi hàng chưa nhấc lên khỏi nền, lực căng trong cáp do động cơ của cơ cấu nâng sinh ra tăng lên dần dần, cho đến khi lực căng trong cáp cân bằng trọng lượng hàng, lúc này hàng bắt đầu được nhấc lên khỏi nền. Ở giai đoạn tiếp theo hàng đã được nhấc lên khỏi nền, và hệ cũng bắt đầu dao động với 2 bậc tự do như *Hình 2*, chúng ta tiếp tục tăng lực căng trong cáp, gọi thành phần tăng này là **u**. Bài toán đặt ra là với u bằng bao nhiêu thì năng lượng tiêu hao để nâng hàng lên một vị trí nào đó cho trước là nhỏ nhất.

Hình1. Cơ cấu nâng của cầu trục.

Bài toán sẽ dẫn việc tìm **u** bằng bao nhiêu thì làm cho hàm mục tiêu sau đạt cực tiểu [1,2]:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(X^T Q X + u^T R u\right) dt \quad (1)$$

Để giải (1) chúng ta có thể sử dụng các phương pháp (PP) giải tích như: biến phân, cực đại pontryagin, Bellman…

Tuy nhiên, nhiều khi hàm mục tiêu rất phức tạp, khó có thể giải bằng PP giải tích, từ đó người ta nghĩ đến các PP số. Sau đây sẽ trình bày PP sử dụng phương trình RICCATI.

2. Thiết kế bộ điều khiển

2.1 Xây dựng mô hình cơ học, phương trình không gian trạng thái

Xét cầu trục nâng hàng từ một vị trí hàng đang được treo lở lửng: m_1 là khối lượng của phần quay cơ cấu nâng quy đổi về chuyển động tịnh tiến theo phương cáp chỗ tiếp xúc với tang, m_2 là khối lượng mã hàng, k là độ cứng quy đổi của cáp, u là lực điều khiển cần tính. Mô hình tính như *Hình 2* (bỏ qua ma sát) [4].

Phương trình vi phân chuyển động:

Động năng của hệ: $T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2;$

thế năng của hệ: $\Pi = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2;$ lực suy rộng không có thế: $Q^*_1 = u,\ Q^*_2 = 0$;

Áp dụng phương trình Lagrange II:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + Q_i^*, i = 1,2.$$

Từ đó lập được phương trình vi phân chuyển động của hệ như sau:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = u \\ m_2\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Viết lại (2) dưới dạng ma trận: $\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$ (3)

Hay $M\ddot{X} + D\dot{X} + KX = Bu$ (4)

Trong đó: $M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix};\ K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Phương trình không gian trạng thái:

$$\frac{dX}{dt} = A_c X(t) + B_c u(t) \tag{5}$$ [1]

Trong đó: $X(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dot{x}_1(t) \quad \dot{x}_2(t)]^T$ (6)

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m_1} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{8}$$

2.2 Phương trình RICCATI

Xét 1 hệ liên tục được mô tả bởi:

$$\frac{dX}{dt} = A_c X(t) + B_c u(t) \tag{9}$$

$$u = F_c X(t) \tag{10}$$

Với trạng thái **X**(0) đã biết.

Tổn hao năng lượng để đưa hệ từ trạng thái **X**(t) về **X**(0) được đánh giá bằng hàm mục tiêu sau:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(X^T Q X + u^T R u\right) dt \tag{11}$$

Chúng ta cần tìm **u** để (11) có giá trị nhỏ nhất. Để bài toán có nghiệm, trong (11) **Q** được giả thiết là ma trận đối xứng không âm và **R** là ma trận đối xứng xác định dương để cho năng của hệ (X^TQX) và năng lượng điều khiển (u^TRu) có giá trị không âm [2, 3], tức là:

$$\mathbf{Q}^T = Q,\ X^TQX \ge 0\ \ \forall X;\ F^T = F,\ \ u^TRu \ge 0\ \ \forall u$$

Từ (9) và (10) ta có:

$$\frac{dX}{dt} = A_c X(t) + B_c u(t) = A_c X(t) + B_c F_c X(t) = \left[A_c + B_c F_c\right] X(t) \tag{12}$$

Áp dụng PP số mũ ma trận, giải (12):

$$X(t) = e^{[A_c + B_c F_c]t} X(0) \tag{13}$$

$e^{[A_c + B_c F_c]t}$: ma trận chuyển đổi trạng thái.

Thay (10) và (13) vào (11):

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty X^T\left(Q + F_c{}^T R F_c\right) X dt$$

$$= \frac{1}{2} X(0)^T \left[\int_0^\infty e^{(A_c + B_c F_c)^T t}(Q + F_c{}^T R F_c) e^{(A_c + B_c F_c)t} dt\right] X(0) \tag{14}$$

Chúng ta đưa vào 1 ma trận hằng số **P** thỏa mãn phương trình sau:

$$-\left(A_c + B_c F_c\right)^T P - P\left(A_c + B_c F_c\right) = Q + F_c{}^T R F_c \tag{15}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{e^{(A_c + B_cF_c)^T t}(-P)e^{(A_c + B_cF_c)^T t}\right\} = e^{(A_c + B_cF_c)^T t}\left(A_c + B_cF_c\right)^T\left(-P\right)e^{(A_c + B_cF_c)^T t} \\
&+e^{(A_c + B_cF_c)^T t}\left(-P\right)\left(A_c + B_cF_c\right)e^{(A_c + B_cF_c)^T t} \\
&= e^{(A_c + B_cF_c)^T t}\left[-\left(A_c + B_cF_c\right)^T P - P\left(A_c + B_cF_c\right)\right]e^{(A_c + B_cF_c)^T t} \\
&= e^{(A_c + B_cF_c)^T t}\left(Q + F_cRF_c\right)e^{(A_c + B_cF_c)^T t}
\end{aligned} \tag{16}$$

Từ (16) và (14), ta có:

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{X}(0)^T\left\{e^{(\mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{F}_c)^T t}(-\mathbf{P})e^{(\mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{F}_c)t}\right\}\Bigg|_0^\infty \mathbf{X}(0) \tag{17}$$

Từ (12), hệ ổn định khi và chỉ khi các trị riêng của ma trận $\left[A_c + B_cF_c\right]$ có phần thực < 0. Vì vậy (17) viết lại là:

$$J = \frac{1}{2} X(0)^T P X(0) \tag{18}$$

X là biến trạng thái có kích thước (n x 1), để **J** là một số dương thì **P** phải là một ma trận xác định dương đối xứng có kích thước (n x n) [1]. Vì **X**(0) đã biết, do đó **J** sẽ nhỏ nhất khi **P** nhỏ nhất.

Từ (10), **u** là số tín hiệu đầu vào có kích thước (r x 1), do đó $\mathbf{F_c}$ phải có kích thước (r x n), có dạng: $F_c = \left[f_{ij} \right]_{r\times n}$ (19)

Chú ý các phương trình sau:

$$\frac{\partial}{f_{ij}}\left(A_c + B_cF_c\right)^T P = \left(A_c + B_cF_c\right)^T \frac{\partial P}{f_{ij}} + \frac{\partial F_c^{\,T}}{f_{ij}} B_c^{\,T}P \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{f_{ij}} P\left(A_c + B_cF_c\right) = \frac{\partial P}{f_{ij}}\left(A_c + B_cF_c\right) + PB_c\frac{\partial F_c}{f_{ij}} \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{f_{ij}}\left(Q + F_c^{\,T}RF_c\right) = \frac{\partial F_c^{\,T}}{f_{ij}} RF_c + F_c^{\,T}R\frac{\partial F_c}{f_{ij}} \tag{22}$$

Đạo hàm 2 vế (15) và chú ý đến (20), (21), (22) ta nhận được:

$$-\left(A_c + B_cF_c\right)^T \frac{\partial P}{f_{ij}} - \frac{\partial P}{f_{ij}}\left(A_c + B_cF_c\right) = \frac{\partial F_c^{\,T}}{\partial f_{ij}}\left(RF_c + B_c^{\,T}P\right) + \left(F_c^{\,T}R + PB_c\right)\frac{\partial F_c}{f_{ij}} \tag{23}$$

i = 1, 2,…, r; j = 1, 2,…, n: (23) có rn phương trình; $\dfrac{\partial F_c}{f_{ij}}$ là ma trận cỡ (r x n), nhận giá trị bằng 1 tại vị trí hàng thứ i, cột thứ j. Tại các vị trí khác là giá trị 0; $\dfrac{\partial F_c^{\,T}}{f_{ij}}$ là ma trận cỡ (n x r), nhận giá trị bằng 1 tại vị trí hàng thứ j, cột thứ i. Tại các vị trí còn lại là giá trị 0.

Từ (18) để J đạt giá trị nhỏ nhất thì đạo hàm của **P** theo f_{ij} bằng 0.

$$\frac{\partial P}{\partial f_{ij}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial f_{ij}} = 0, \forall X(0) \tag{24}$$

Thay (24) vào (23), ta nhận được:

$$RF_c + B_c^{\,T}P = 0 \Rightarrow F_c = -R^{-1}B_c^{\,T}P \tag{25}$$

(25) tồn tại khi R là một ma trận vuông không suy biến có cỡ (m x m) (bằng số cột của B_c).

Từ (25) ta có các biểu thức sau:

$$B_cF_c = -B_cR^{-1}B_c^TP \tag{26}$$

$$F_c^{\,T}RF_c = \left(-R^{-1}B_cP\right)^T R\left(-R^{-1}B_cP\right) = P^TB_c\left(R^T\right)^{-1} R\left(R^{-1}B_cP\right) = PB_cR^{-1}B_cP \tag{27}$$

Thay (26), (27) vào (15):

$$-\left(A_c - B_cR^{-1}B_cP\right)^T P - P\left(A_c - B_cR^{-1}B_cP\right) = Q + PB_cR^{-1}B_c^TP$$

$$\boxed{\Leftrightarrow A_c^{\,T}P + PA_c - PB_cR^{-1}B_c^{\,T}P + Q = 0} \tag{28}$$

(28) được gọi là phương trình RICCATI.

BĐKTU: $u^o = F_cX = -R^{-1}B_cPX$ (29)

2.3 Áp dụng phương trình RICCATI tìm BĐKTU u^o

Để giải phương trình RICCATI bằng phương pháp số sử dụng phần mềm matlab, ở đây ta xét ví dụ một cầu trục có: m_1= 7000 kg, m_2= 10000 kg, k= 100000 N/m. Khi đó:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -14.2857 & 14.2857 & 0 & 0 \\ 10.0000 & -10.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_c = 1.0e\text{-}003. \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1429 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Q có kích thước (4x4), Chọn $Q_{4\times 4} = 10 \wedge 4. \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

R có kích thước (1x1), Chọn $R_{1\times 1} = [1]$

Giải (28) bằng phần mền matlab 7.5 cho kết quả sau:

$$P = 1.0e{+}007 * \begin{bmatrix} 2.6260 & -2.2661 & 0.4044 & 0.5754 \\ -2.2661 & 2.7358 & 0.4810 & 0.6888 \\ 0.4044 & 0.4810 & 1.9917 & 2.5991 \\ 0.5754 & 0.6888 & 2.5991 & 3.9610 \end{bmatrix}; \; L = \begin{bmatrix} -0.0104 + 4.9281i \\ -0.0104 - 4.9281i \\ -0.1929 + 0.1929i \\ -0.1929 - 0.1929i \end{bmatrix}$$

$$F_c = 1.0e{+}003 * \begin{bmatrix} -0.5777 & -0.6872 & -2.8452 & -3.7130 \end{bmatrix}$$

BĐKTU:

$$u^o = 1.0e{+}003 * \begin{bmatrix} -0.5777 & -0.6872 & -2.8452 & -3.7130 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}^T$$

3. Đánh giá kết quả và kết luận

Bây giờ ta sẽ xét xem với **u** đã tính như ở trên thì liệu năng lượng tiêu hao là nhỏ nhất hay không. Và nếu có thì hệ có làm việc ổn định không? Ta có thuật giải như sau:

Bước 1 - Thay **u** đã tìm được vào (5) tìm được vector trạng thái **X**, sau đó thay vào (1) tính được chỉ số đánh giá năng lượng tiêu hao $\mathbf{J_o}$.

Bước 2 - Với trường hợp trên, F_c sẽ có dạng: $F_c = \begin{bmatrix} f1 & f2 & f3 & f4 \end{bmatrix}$, từ (25) ta thấy $\mathbf{F_c}$ ngược dấu với $\mathbf{B_c}$ nên các phần tử $\mathbf{F_c}$ sẽ mang dấu (-). Cho các f_i chạy từ giá trị -k nào đó đến 0. Ứng với mỗi trường hợp của các biến chạy như vậy, ta sẽ có một tín hiệu điều khiển **u**, làm tương tự B1 ta sẽ tính được các chỉ số tiêu hao năng lượng tương tứng $\mathbf{J_j}$, đem so sánh với $\mathbf{J_o}$.

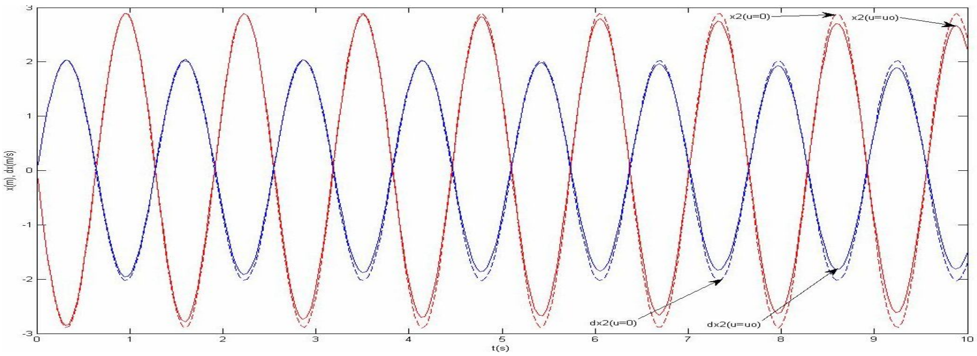
Bước 3 - Nếu $J_j < J_o$, kiểm tra tính ổn định của hệ: $\mathrm{Real}\big(\mathrm{eig}(A_c + B_c F_c)\big) < 0$

Bước 4 - Xuất kết quả $\mathbf{u_j}$, $\mathbf{J_j}$ ứng với mỗi trường hợp thỏa mãn điều kiện ở Bước 3, đem so sánh với $\mathbf{u^o}$, $\mathbf{J_o}$ đánh giá sai khác.

**** Kết quả tính trong matlab 7.5***

Điều kiện đầu: t=0, khi m_2 ở vị trí thấp nhất đúng bằng độ giãn do khối lượng m_2 tĩnh gây ra, m_1 chưa có chuyển vị, vận tốc m_1, m_2 =0:$\Rightarrow$ **X(0)**=$[0\ -1\ 0\ 0]^T$, giả sử thời gian nâng hàng là 10s. Cho mỗi f_i chạy từ 10^(3*[-20→0]) với bước nhảy bằng 0.2*(10^3). Kết quả với trường hợp BĐKTU $\mathbf{u^o}$ thì năng lượng tiêu hao là nhỏ nhất và hệ ổn định (J_o= 6.8777e+006).

Khi **u**=0: J= 8.1015e+006, như vậy chỉ tiểu đánh giá năng lượng tiêu hao lớn gấp 1,18 lần so với trường hợp $\mathbf{u^o}$. Điều này được giải thích như sau (xem Hình3): Khi chạy chương trình, từ kết quả ta thấy rằng, khi **u**=0, mặc dù năng lượng điều khiển = 0, như do giá trị của **X(u**=0**)** lớn hơn giá trị **X**(**u**=**u^o**) nhiều, nghĩa là m_1, m_2 dao động với li độ và vận tốc lớn hơn dẫn đến kết quả như tính toán ở trên.



Hình3. Sự phụ thuộc của biên độ và vận tốc dao động của m_2 vào t khi u=0 và u=u^o.

Như vậy, BĐKTU được thiết kế theo PP như trên không những đảm bảo được năng lượng tiêu hao là nhỏ nhất mà còn đảm bảo hệ làm việc ổn định; việc tính toán cũng dễ dàng thực hiện nhờ sự trợ giúp của các phần mềm như Matlab, Maple, ... Bài báo cũng có thể làm tài liệu tham khảo cho việc tính toán BĐKTU cơ cấu nâng của cổng trục, cầu chuyển tải, các cần trục dạng cần…

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Jer Nang Juang – Minh Q.Phan, *Identification and Control of Mechanical systems*, Cambridge University Press 2004.

[2] Nguyễn Doãn Phước, *Lý thuyết điều khiển tuyến tính*, Nxb KH & KT, Hà Nội 2005.

[3] Nguyễn Doãn Phước, *Lý thuyết điều khiển phi tuyến*, Nxb KH & KT, Hà Nội 2008.

[4] Trần Văn Chiến, *Động lực học máy trục*, Nxb Hải Phòng, Hải Phòng 2005.

Người phản biện: TS. Đào Ngọc Biên