CỰC TRỊ CỦA MỘT LỚP CÁC HÀM CÓ DẠNG TỈ SỐ CỦA HAI HÀM ĐẠI SỐ

Extrema of some functions being the ratio of two algebraic functions

TS. HOÀNG VĂN HÙNG

Viện Khoa học Cơ bản, Trường ĐHHH

Tóm tắt

Tác giả chứng minh rằng giá trị lớn nhất của hàm n biến u = $\dfrac{f(x_1,...,x_n)^k}{f(x_1^k,...,x_n^k)}$ *trên miền các biến độc lập dương, trong đó k > 1 và f thuộc một lớp các hàm đại số với hệ số dương , bằng* $f(1,1,...,1)^{k-1}$*. Kết quả được suy rộng cho trường hợp khi f(x) là tổng của chuỗi luỹ thừa của một biến x với các hệ số dương và miền hội tụ chứa khoảng đóng [0;1].*

Abstract

The author has proved that the greatest value of a n – variable function u = $\dfrac{f(x_1,...,x_n)^k}{f(x_1^k,...,x_n^k)}$ *on the domain of positive independent arguments , where k > 1 and f belongs to a class of algebraic functions with positive coefficients , is* $f(1,1,...,1)^{k-1}$*. The result was extended to the case of f(x) being the sum of a power series of variable x with positive coefficients and the region* of convergence containing the closed interval [0;1].

Trong bài này ký hiệu **N** chỉ tập các số nguyên không âm, ký hiệu **x** = $(x_1, x_2,..., x_n)$ **> 0** chỉ **x** là phần tử của $\mathbf{R}^n$ với mọi thành phần x_i đều dương. Giả sử **p** = $(p_1, p_2,..., p_n)$ > **0** , $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ (**p** gọi là một hệ trọng lượng chuẩn) và **x** = $(x_1, x_2,..., x_n)$ **> 0,** trong [1] tác giả Phan Huy Khải đã dùng bất đẳng thức Cauchy suy rộng :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\,p_i} \qquad (1)$$

để chứng minh định lý sau :

Định lý 1. Giả sử $g(x_1, x_2,..., x_n) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_1^{\alpha_{1i}}...x_n^{\alpha_{ni}}$, trong đó c_i (i =1,...,m) là các số dương , $\alpha_{1i}, \alpha_{2i},..., \alpha_{ni}$ $(i = 1,2,..., m)$ là các số thực thoả mãn:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ki} = 0 \quad (\forall k \in \{1,2,..., n\}) \qquad (2).$$

Khi đó giá trị bé nhất của hàm $g(x_1,..., x_n)$ trên miền **x > 0** là:

$$l = \sum_{i=1}^{m} c_i$$

Chứng minh:

Đặt :

$$p_i = \frac{c_i}{l} \quad , \; y_i = x_1^{\alpha_{1i}} ... x_n^{\alpha_{ni}}, \; (i = 1,2,...,m)$$

ta có **p** = $(p_1, p_2,..., p_m)$ là một hệ trọng lượng chuẩn và **y** = $(y_1, y_2,..., y_m)$ **> 0 .** Áp dụng bất đẳng thức (1) cho hệ trọng lượng **p** và bộ số **y**, dùng điều kiện (2) ta được:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i y_i \geq \prod_{i=1}^{m} y_i^{p_i} = 1 \leftrightarrow g(x_1,..., x_n) \geq l \qquad (\text{ trên miền } \mathbf{x > 0}).$$

Mặt khác $g(1,...,1) = \sum_{i=1}^{m} c_i = l$. Vậy: $\min\{g(x_1,..., x_n) : \mathbf{x} > \mathbf{0}\} = l$.

Nhận xét: Hàm g trong định lý 1 thoả mãn điều kiện (2) được tác giả Phan Huy Khải gọi là phân thức chính quy.

Áp dụng định lý 1 có thể dễ dàng tìm được giá trị bé nhất của các phân thức chính quy một biến hoặc nhiều biến trên miền mà các biến đều nhận giá trị dương.

Ví dụ: Tìm giá trị bé nhất của các hàm số sau trên miền mà tất cả các biến đều dương.

1) $u = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} \quad (\alpha, \beta, \gamma \in (0;+\infty))$ (x,y,z là các biến)

2) $z = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i.x^{\frac{i^2}{n}} y^{\frac{1}{(i+1)}}} + x^{\frac{n+1}{2}} y^{\frac{n}{n+1}}.$ (x,y là các biến)

Giải:

1) Ta kiểm tra điều kiện (2) với hàm u:

Trong biểu diễn của u có 3 biến là x,y,z. Tổng các tích của các hệ số và số mũ tương ứng trong mỗi đơn thức đối với biến x là :

$$1.\alpha + \alpha.(-1) + \beta.0 + \gamma.0 = 0$$

Vậy điều kiện (2) thoả mãn đối với biến x. Tương tự, đối với các biến y, z điều kiện (2) cũng được thoả mãn. Vậy định lý 1 áp dụng được đối với hàm u và ta có:

$$\min\{\mathrm{u} : \mathrm{x} > 0, \mathrm{y} > 0, \mathrm{z} > 0\} = 1 + \alpha + \beta + \gamma$$

2) Trong biểu thức của z có 2 biến là x và y. Tổng các tích của các hệ số và số mũ tương ứng trong mỗi đơn thức đối với biến x là:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\left(\frac{-i^2}{n}\right) + 1.\frac{n+1}{2} = 0$$

Tổng tương tự đối với biến y là:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\left(\frac{-1}{i+1}\right) + 1.\frac{n}{n+1} = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) + \frac{n}{n+1} = 0$$

Vậy định lý 1 cũng áp dụng được đối với hàm z và ta có:

$$\min\{\mathrm{z} : \mathrm{x} > 0, \mathrm{y} > 0\} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Chúng tôi sử dụng một biến dạng của bất đẳng thức Hölder để chứng minh một định lý tương tự định lý 1. Cụ thể ta có bất đẳng thức sau:

Giả sử **q** $= (q_1, q_2,..., q_n) >$ **0**, **z** = $(z_1, z_2,..., z_n) >$ **0** , k > 1, khi đó có bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i z_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)^{1-\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i z_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \qquad (3)$$

(xem [2], trang 85).

Nhận xét: Hiển nhiên (3) vẫn còn đúng nếu tổng hữu hạn trong (3) được thay bằng chuỗi vô hạn và một số các q_i hoặc z_i bằng 0, trong đó ta xem là (3) đúng nếu vế phải (3) bằng $+\infty$. Ta sẽ chỉ sử dụng bất đẳng thức (3) dưới dạng chuỗi kèm theo giả thiết là không phải tất cả các q_i và z_i đều bằng 0. Kết quả chính của bài báo này là :

Định lý 2. Đặt:

$$f(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} ... x_n^{\alpha_{ni}},$$

trong đó : $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_m) > 0$, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) > 0$, $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, ..., \alpha_{ni}$ $(i = 1,2,...,m)$ là các số thực tuỳ ý, k > 1. Khi đó ta có :

$$\max\left\{\frac{f(x_1,...,x_n)^k}{f(x_1^k,...,x_n^k)} : \mathbf{x} = (x_1,...,x_n) > 0\right\} = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i\right)^{k-1}$$

Chứng minh:

Đặt $q_i = c_i$, $z_i = x_1^{\alpha_{1i}} ... x_n^{\alpha_{ni}}$, $(i = 1,2,...,m)$. Áp dụng bất đẳng thức (3) ta được:

$$f(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} ... x_n^{\alpha_{ni}} \le \left(\sum_{i=1}^{m} c_i\right)^{1-\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_1^{k\alpha_{1i}} x_2^{k\alpha_{2i}} ... x_n^{k\alpha_{ni}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\leftrightarrow \frac{f(x_1,...,x_n)}{f(x_1^k,...,x_n^k)^{1/k}} \le \left(\sum_{i=1}^{m} c_i\right)^{1-\frac{1}{k}} \leftrightarrow \frac{f(x_1,...,x_n)^k}{f(x_1^k,...,x_n^k)} \le \left(\sum_{i=1}^{m} c_i\right)^{k-1}$$

Mặt khác , ta có :

$$\frac{f(1,1,...,1)^k}{f(1^k,1^k,...,1^k)} = \frac{f(1,1,...,1)^k}{f(1,1,...,1)} = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i\right)^{k-1}$$

Vậy :

$$\max\left\{\frac{f(x_1,...,x_n)^k}{f(x_1^k,...,x_n^k)} : \mathbf{x} = (x_1,...,x_n) > 0\right\} = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i\right)^{k-1}$$

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất của các hàm sau trên miền mà tất cả các biến đều dương :

1) $y = \dfrac{(x+1)^{2010}}{x^{2010}+1}$ (x là biến)

2) $z = \dfrac{(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^4)^2}{ax^6 + bx^4y^2 + cx^2y^4 + dy^8}$ $(a,b,c,d \in (0;+\infty))$ (x,y là biến)

3) $u = \dfrac{(x^3\sqrt{z} + 2y^2z^3 + 5xz^6)^{10}}{x^{30}z^5 + 1024y^{20}z^{30} + 5x^{10}z^{60}}$ (x,y,z là các biến).

Giải: Xem các đơn thức không chứa biến nào đó như các đơn thức chứa biến đó với số mũ 0, ta thấy tất cả các giả thiết của định lý 2 đều được thoả mãn đối với ví dụ 1 và 2 (các giá trị tương ứng của k là : k = 2010 trong ví dụ 1; k = 2 trong ví dụ 2). Đối với ví dụ 3, đặt t = $2y^2$ ta viết lại hàm u như sau :

$$u = \frac{(x^3\sqrt{z} + tz^3 + 5xz^6)^{10}}{x^{30}z^5 + t^{10}z^{30} + 5x^{10}z^{60}} \ ,$$

giá trị k tương ứng là 10. Vậy theo định lý 2 , giá trị lớn nhất của các hàm số tương ứng trên miền tất cả các biến đều dương là :

max{ y : x > 0} = 2^{2009} , max{ z : x > 0,y > 0} = a+b+c+d , max{ u : x > 0,y >0, z>0} = 7^9

Nhận xét: Bằng cách đổi biến bạn đọc có thể tìm giá trị lớn nhất của các hàm phức tạp hơn các hàm đưa ra trong các ví dụ trên.

Từ định lý 2 ta suy ra hệ quả:

Định lý 3: Với các giả thiết như trong định lý 2 ta có:

$$\min\{\frac{f(x_1^k,...,x_n^k)}{f(x_1,...,x_n)^k} :\ \mathbf{x} = (x_1,...,x_n) > 0\} = (\sum_{i=1}^{m} c_i)^{1-k}$$

Ví dụ: 1)Giả sử x, y, z là các số dương thoả mãn x+y+z = 3. Chứng minh rằng với mọi số k > 1 ta có :

$$x^k + y^k + z^k \geq 3$$

2) Tìm giá trị bé nhất của hàm số :

u = x + y + z + t

trên miền D = $\{x > 0, y > 0, z > 0, t > 0 : xy + xz + xt + yz + yt + zt = 1\}$.

Giải.

1) Áp dụng định lý 3 ta có :

$$\frac{x^k + y^k + z^k}{(x+y+z)^k} \geq \frac{1}{3^{k-1}} \leftrightarrow \frac{x^k + y^k + z^k}{3^k} \geq \frac{1}{3^{k-1}} \leftrightarrow x^k + y^k + z^k \geq 3$$

2) Ta có : $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = (x+y+z+t)^2 - 2(xy+xz+xt+yz+yt+zt) = u^2 - 2$ .Theo định lý 3 ta có :

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq \frac{1}{4}(x+y+z+t)^2 = \frac{u^2}{4} \rightarrow u^2 - 2 \geq \frac{u^2}{4} \leftrightarrow u^2 \geq \frac{8}{3} \leftrightarrow u \geq \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Khi x = y = z = t = $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ta có : xy+xz+xt+yz+yt+zt = 1 và u = $\sqrt{\frac{8}{3}}$. Vậy :

$$\min_D u = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Bây giờ giả sử $\{a_n\}$ ($n \in \mathbf{N}$) là một dãy các số thực không âm nhưng chứa vô hạn số dương sao cho chuỗi dương $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ. Xét chuỗi luỹ thừa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (4)$$

Chuỗi (4) hội tụ tại x = 1 nên theo định lý Abel , miền hội tụ của chuỗi (4) chứa khoảng đóng [0;1]. Gọi tập các điểm hội tụ dương của chuỗi (4) là **X***, ta có 1 $\in$ **X***. Gọi f(x) là tổng của chuỗi (4) trên miền **X*** . Áp dụng bất đẳng thức (3) dưới dạng chuỗi ta có:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leq (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)^{1-\frac{1}{k}} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn})^{\frac{1}{k}} \leftrightarrow \frac{f(x)}{f(x^k)^{\frac{1}{k}}} \leq (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)^{1-\frac{1}{k}} \qquad (5)$$

Trong đó ta xem vế trái của (5) bằng 0 nếu chuỗi $f(x^k)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{kn}$ ***phân kỳ*** (*). Bất đẳng thức (5) tương đương với bất đẳng thức:

$$\frac{f(x)^k}{f(x^k)}\le(\sum_{n=0}^{\infty}a_n)^{k-1}\quad(\forall x\in\mathbf{X*})\qquad(6)$$

Không khó khăn có thể chứng minh rằng nếu a_{i0} là hệ số có chỉ số bé nhất trong các hệ số khác 0 của chuỗi (4) thì:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)^k}{f(x^k)}=a_{i0}^{k-1}$$

Do đó ***nếu xem*** a_{i0}^{k-1} ***là giá trị của vế trái bất đẳng thức (6) khi x = 0*** (**) thì (6) đúng cả với trường hợp x = 0. Mặt khác, để ý rằng:

$$\frac{f(1)^k}{f(1^k)}=f(1)^{k-1}=(\sum_{n=0}^{\infty}a_n)^{k-1}\quad ,$$

kết hợp với (6) ta suy ra :

$$\max\{\frac{f(x)^k}{f(x^k)}:x\in\mathbf{X*}\cup\{0\}\}=f(1)^{k-1}=(\sum_{n=0}^{\infty}a_n)^{k-1}$$

Như vậy ta thu được định lý :

Định lý 4: Giả sử chuỗi dương $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ hội tụ và có tổng dương. Gọi f(x) là tổng của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ khi x thuộc tập **X** các điểm hội tụ không âm của chuỗi đó. Khi đó ta có :

$$\max\{\frac{f(x)^k}{f(x^k)}:x\in\mathbf{X}\}=f(1)^{k-1}=(\sum_{n=0}^{\infty}a_n)^{k-1}$$

(ta giữ nguyên các quy ước (*) và (**)).

Ví dụ: 1) Ta có : $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ (\forall x\in\mathbf{R})$ nên áp dụng định lý 4 ta có ngay :

$$\max\{\frac{e^{2010x}}{e^{x^{2010}}}:x\ge 0\}=e^{2009}\quad(k=2010).$$

Nếu nhận xét thêm rằng $\frac{e^{-2010x}}{e^{x^{2010}}}\le\frac{e^{2010x}}{e^{x^{2010}}}\ \ khi\ x\ge 0$ kết quả trên còn cho khẳng định mạnh hơn :

$$\max\{\frac{e^{2010x}}{e^{x^{2010}}}:x\in\mathbf{R}\}=e^{2009}\quad(k=2010)$$

2) Ta có : $-\ln(1-\frac{x}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x}{2})^n\quad(\forall x\in(-2;2))$.Áp dụng định lý 4 ta có :

$$\max\{\frac{\ln^{100}(1-\frac{x}{2})}{-\ln(1-\frac{x^{100}}{2})}:0\le x<\sqrt[100]{2}\}=(\ln 2)^{99}\quad(\text{ k = 100})$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Phan Huy Khải. *Cực tiểu của các phân thức chính quy*. Tuyển tập 30 năm tạp chí toán học và tuổi trẻ . Nhà xuất bản Giáo dục, 1998 (trang 231- 234).

[2]. G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya. *Bất đẳng thức*. Nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệp.Hà nội -1981 (dịch từ bản tiếng Nga).

Người phản biện : TS. Phạm Văn Minh