BIỂU DIỄN CỦA TÍCH BỆN CÁC NHÓM XYCLIC $C_m \int C_6$

REPRESENTATIONS OF THE WREATH PRODUCT $C_m \int C_6$

ThS. LÊ THANH HOA
Tổ Toán - Trường ĐHHH

Tóm tắt:

Bài báo này trình bày các kết quả nghiên cứu biểu diễn phức của tích bện $C_m \int C_6$, trong đó C_6 là một nhóm xyclic cấp 6 và là một nhóm xyclic cấp m, với $m \in \mathrm{N}^*$ tuỳ ý.

Abstract:

This article presents some results in complex representations of the wreath product $C_m \int C_6$ which the author has obtained under the assumptions that C_6 is a cyclic group of order 6 and C_m is a cyclic group of order m, $m \in \mathrm{N}^*$.

1. Đặt vấn đề

Lý thuyết biểu diễn nhóm hữu hạn đóng một vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu nhóm hữu hạn. Hơn nữa, nó có nhiều ứng dụng trong Tôpô đại số và đối đồng điều của nhóm, trong hoá học lượng tử, trong vật lý...

Ra đời vào khoảng thế kỉ XIX, cho đến nay lý thuyết biểu diễn nhóm đã phát triển khá hoàn thiện với những công cụ và cách tiếp cận khác nhau giúp ta nghiên cứu tốt hơn biểu diễn của các nhóm hữu hạn. Tuy nhiên, để chỉ ra tường minh biểu diễn của một nhóm hữu hạn G cụ thể không phải là một việc đơn giản và đòi hỏi một sức lao động nhất định.

Trong bài báo này, tôi xin được trình bày các kết quả nghiên cứu về biểu diễn phức của tích bện $C_m \int C_6$.

2. Phương pháp nghiên cứu.

Như đã biết, một biểu diễn của nhóm G trên một không gian vectơ phức V là một đồng cấu nhóm $\varphi: G \to GL(V)$ từ G vào nhóm các tự đẳng cấu tuyến tính của V. Do *Char* ***C**** *= 0*, không chia hết cấp của G nên mọi biểu diễn phức G luôn phân tích được thành tổng trực tiếp của các biểu diễn bất khả quy (xem [1], Chương 5). Vậy nên, việc nghiên cứu biểu diễn phức của nhóm G được quy về việc tìm một họ đầy đủ các biểu diễn bất khả quy phức đôi một không đẳng cấu với nhau.

Theo [2], Chương 8, Mệnh đề 25 khẳng định rằng: Nếu nhóm G phân tích được thành tích nửa trực tiếp của một nhóm abel A và một nhóm H thì tất cả các biểu diễn bất khả quy của G có thể được xây dựng dựa trên các biểu diễn bất khả quy của nhóm A và của các nhóm con của nhóm H. Tiếp cận bằng cách này, bài toán tìm tất cả các biểu diễn bất khả quy phức đôi một không đẳng cấu với nhau của nhóm $C_m \int C_6$ được giải quyết triệt để.

3. Kết quả nghiên cứu.

Gọi g là một phần tử sinh của nhóm xyclic C_m và *t* = (1, 2, 3, 4, 5, 6) là một phần tử sinh của nhóm xyclic C_6. Khi đó,

$$G := C_m \int C_6 = \left\{ \left(g^{n_1}, g^{n_2}, ..., g^{n_6}; t^{\alpha} \right); 1 \le \alpha \le 6, 1 \le n_j \le m, j = 1, ..., 6 \right\}.$$

Xin nhắc lại, phép toán trên G được định nghĩa như sau:

$$(g^{n_1},...,g^{n_6};t^{\alpha})(g^{n'_1},...,g^{n'_6};t^{\alpha'}) = (g^{n_1+n'_{t^{-\alpha}(1)}},...,g^{n_6+n'_{t^{-\alpha}(6)}};t^{\alpha+\alpha'}).$$

Đặt:

$$A := \left\{(g^{n_1},...,g^{n_6};e); 1 \le n_j \le m, j = 1,...,6\right\};$$

$$a_j := (1,...,g,...,1;e), j = 1,...,6$$

(trong công thức của a_j, phần tử g nằm ở vị trí thứ j còn các vị trí khác đều bằng 1),

$$h := (1,1,...,1;t)$$

và $$H := \langle h \rangle.$$

Nhận xét: Nhóm A là một nhóm con abel chuẩn tắc của $C_m \int C_6$. Hơn nữa, $C_m \int C_6$ là tích nửa trực tiếp của nhóm A bởi nhóm H.

Do đó, bằng việc cảm sinh từ các biểu diễn bất khả quy của nhóm A và của các nhóm con của nhóm H, ta sẽ thu được tất cả các biểu diễn bất khả quy của nhóm $C_m \int C_6$. Cụ thể như sau:

Nhóm $C_m \int C_6$ có đúng:

$$6m + \frac{3(m^2 - m)}{2} + \frac{2(m^3 - m)}{3} + \frac{m^6 - m^3 - m^2 + m}{6}$$

biểu diễn bất khả quy đôi một không đẳng cấu với nhau và chúng được chia thành 4 loại.

Trong các phần tiếp theo, ω được kí hiệu là một căn nguyên thuỷ bậc *m* của 1.

Loại 1: Biểu diễn bất khả quy 1 - chiều

Nhóm $C_m \int C_6$ có đúng *6m* biểu diễn bất khả quy 1 - chiều $\left\{\theta_{n,\varphi_{l_1}}\right\}_{\substack{1 \le n \le m \\ 1 \le l_1 \le 6}}$. Cụ thể, với mỗi cặp $(l_1, n), 1 \le n \le m$ và $1 \le l_1 \le 6,$ ta có một biểu diễn bất khả quy 1 - chiều

$$\theta_{n,\varphi_{l_1}} : C_m \int C_6 \to \mathbf{C}^*$$

được xác định duy nhất bởi

$$\begin{cases} \theta_{n,\varphi_{l_1}}(h) = \Omega_1^{\,l_1} \\ \theta_{n,\varphi_{l_1}}(a_j) = \omega^n, j = 1,...,6, \end{cases}$$

trong đó Ω_1 là một căn nguyên thuỷ bậc 6 của 1.

Loại 2: Biểu diễn bất khả quy 2 - chiều

Nhóm $C_m \int C_6$ có đúng $\dfrac{3(m^2 - m)}{2}$ biểu diễn bất khả quy 2 - chiều đôi một không đẳng cấu. Chúng được xây dựng cụ thể như sau.

Đặt

$$X_2 := \left\{\left(n_1, n_2, n_1, n_2, n_1, n_2\right); 1 \le n_1 \ne n_2 \le m\right\}.$$

Ứng với mỗi bộ 6 số $\chi_i = \left(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\right) \in X_2$, có 3 biểu diễn bất khả quy 2 - chiều tương ứng

$$\theta_{\chi_i,\varphi_{l_2}} : C_m \int C_6 \to GL_2(\mathbf{C})$$

được xác định duy nhất bởi

$$\theta_{\chi_i,\varphi_{l_2}}(h) = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_2^{\,l_2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

và

$$\theta_{\chi_i,\varphi_{l_2}}(a_j) = \begin{pmatrix} \omega^{n_j} & 0 \\ 0 & \omega^{n_{j-1}} \end{pmatrix}, (j = 1,...,6),$$

trong đó Ω_2 là một căn nguyên thuỷ bậc 3 của 1 và $l_2 = 1,2,3$.

Loại 3: Biểu diễn bất khả quy 3 - chiều

Nhóm $C_m \int C_6$ có đúng $\dfrac{2(m^3 - m)}{3}$ biểu diễn bất khả quy 3 - chiều, đôi một không đẳng cấu. Chúng được xây dựng như sau.

Gọi X_3 là tập tất cả các bộ 6 số có dạng $(n_1, n_2, n_3, n_1, n_2, n_3)$ thoả mãn $1 \le n_j \le m$, $j = 1,2,3$ và thuộc một trong các trường hợp sau:

$$n_1 < n_3,\ n_2 < n_3 \qquad (1)$$

$$n_1 < n_2 = n_3 \qquad (2)$$

Ứng với bộ 6 số $\chi_i = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) \in X_3$, có 2 biểu diễn bất khả quy 3 - chiều tương ứng.

$$\theta_{\chi_i,\varphi_{l_3}} : C_m \int C_6 \to GL_3(\mathbf{C})$$

được xác định duy nhất bởi

$$\theta_{\chi_i,\varphi_{l_3}}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-1)^{l_3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

và

$$\theta_{\chi_i,\varphi_{l_3}}(a_j) = \begin{pmatrix} \omega^{n_j} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{n_{j-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{n_{j-2}} \end{pmatrix}, (j = 1,...,6),$$

với $l_3 = 1,2$.

Loai 4: Biểu diễn bất khả quy 6 - chiều

Nhóm $C_m \int C_6$ có đúng $\dfrac{m^6 - m^3 - m^2 + m}{6}$ biểu diễn bất khả quy 6 - chiều, đôi một không đẳng cấu. Chúng được xây dựng như sau.

Gọi X_4 là tập tất cả các bộ 6 số $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ thoả mãn $1 \le n_j \le m, j = 1,...,6$ và thuộc một trong các trường hợp sau:

$$n_j < n_6,\ j = 1,2,...,5 \qquad (1)$$

$$n_j < n_5 = n_6,\ j = 1,...,4 \qquad (2)$$

$$n_j < n_4 = n_6,\ j = 1,2,3,5 \qquad (3)$$

$$\begin{cases} n_2 = n_5 < n_3 = n_6 \\ n_1 < n_4 < n_6 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} n_2 < n_5 < n_3 = n_6 \\ n_1 < n_6 \\ n_4 < n_6 \end{cases} \quad (5)$$

$$n_j < n_4 = n_5 = n_6 ,\ j = 1,2,3 \quad (6)$$

$$n_j < n_3 = n_5 = n_6 ,\ j = 1,2,4 \quad (7)$$

$$n_j < n_2 = n_5 = n_6 ,\ j = 1,3,4 \quad (8)$$

$$\begin{cases} n_3 < n_5 < n_2 = n_4 = n_6 \\ n_1 < n_6 \end{cases} \quad (9)$$

$$n_1 < n_3 = n_5 < n_2 = n_4 = n_6 \quad (10)$$

$$n_j < n_3 = n_4 = n_5 = n_6 ,\ j = 1,2 \quad (11)$$

$$n_j < n_2 = n_4 = n_5 = n_6 ,\ j = 1,3 \quad (12)$$

$$n_1 < n_4 < n_2 = n_3 = n_5 = n_6 \quad (13)$$

$$n_2 < n_5 < n_1 = n_3 = n_4 = n_6 \quad (14)$$

$$n_1 < n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 \quad (15)$$

Ứng với bộ 6 số $\chi_i = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) \in X_4$, có đúng 1 biểu diễn bất khả quy 6 - chiều tương ứng.

$$\theta_{\chi_i,\varphi_{l_6}} : C_m \int C_6 \to GL_6(\mathbf{C})$$

được xác định duy nhất bởi

$$\theta_{\chi_i,\varphi_{l_6}}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{6\times 6}$$

và

$$\theta_{\chi_i,\varphi_{l_6}}(a_j) = \begin{pmatrix} \omega^{n_j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{n_{j-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{n_{j-2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{n_{j-3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{n_{j-4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{n_{j-5}} \end{pmatrix}_{6\times 6} ,\ j = 1,...,6.$$

Chú ý: Ở đây, $(j-\beta)$ được đồng nhất với $(j-\beta) \bmod 6$.

4. Kết luận:

Trên đây là công thức tường minh của tất cả các biểu diễn bất khả quy đôi một không đẳng cấu của nhóm $C_m \int C_6$, bao gồm:

- *6m* biểu diễn bất khả quy 1 - chiều,
- $\frac{3(m^2 - m)}{2}$ biểu diễn bất khả quy 2 - chiều,
- $\frac{2(m^3 - m)}{3}$ biểu diễn bất khả quy 3 - chiều,
- $\frac{m^6 - m^3 - m^2 + m}{6}$ biểu diễn bất khả quy 6 - chiều.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại số đại cương,* NXB Giáo dục, 1999.

[2]. Jean- Pierre Serre, *Linear Representations of Finite Groups,* Springer - Verlag, New York Inc, 1977.

Người phản biện: TS. Hoàng Văn Hùng