

# TÍNH TOÁN DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA CẦU LIÊN TỤC BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN CHUYỂN TIẾP

## CALCULATION THE FREE VIBRATION OF CONTINUOUS BRIDGES BY TRANSFER MATRIX METHOD

SV. NGÔ VIỆT ANH, ĐỖ ĐÌNH PHÚ  
ThS. LÊ TÙNG ANH

Khoa Công trình, Trường ĐHHH Việt Nam

### Tóm tắt

Dao động tự do đóng vai trò rất quan trọng trong việc tính toán ổn định động lực học công trình cầu. Trong bài báo này, các tác giả trình bày phương pháp ma trận chuyển tiếp (ma trận truyền) [2] để tính toán dao động tự do của cầu liên tục.

### Abstract

The free vibration plays an important role in the calculation of bridges dynamic stability. In this paper, the authors present the Transfer Matrix Method (TMM) [2] in order to calculate the free vibration of continuous bridges.

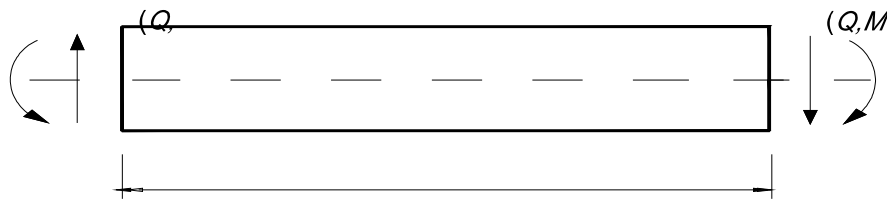
## 1. Đặt vấn đề

Trong tính toán ổn định động lực học công trình cầu, một vấn đề quan trọng là tính toán dao động tự do của dầm cầu. Trên cơ sở tính toán dao động tự do, chúng ta có thể tránh được hiện tượng cộng hưởng do tác dụng của đoàn tải trọng di động cũng như có thể tính toán tiếp dao động cưỡng bức của dầm cầu. Hiện nay, để tính toán tần số dao động tự do thường thực hiện theo các phương pháp gần đúng (Ritz, Rayleigh, ...), đối với dự án lớn mới có điều kiện thí nghiệm trên mô hình vật lý. Trong phạm vi bài báo này, các tác giả sẽ nghiên cứu sử dụng phương pháp ma trận chuyển tiếp (ma trận truyền) để tính toán tần số dao động tự do cho cầu liên tục có tiết diện biến đổi. Phần cuối của bài báo là một ví dụ tính toán mô phỏng số, áp dụng cho một công trình cầu thực tế. Sau đó sẽ so sánh với kết quả tính toán bằng phần mềm Sap 2000, từ đó rút ra độ tin cậy của chương trình tính.

## 2. Cơ sở lý thuyết

### 2.1. Ma trận chuyển tiếp của đoạn dầm có tiết diện không đổi chịu dao động uốn [2]

Xét một đoạn dầm chiều dài  $l$ , ký hiệu đoạn dầm bằng chữ  $j$ , đầu bên phải của đoạn dầm ký hiệu  $(j+1)$  và bên trái ký hiệu  $(j)$ . Lực cắt và mômen uốn ở đầu mút được biểu diễn theo hình 1:



Hình 1. Sơ đồ biểu diễn đoạn dầm thứ  $j$

Phương trình vi phân dao động uốn của dầm khi dao động tự do:

$$EJ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Trong đó:

$z$  - chuyển vị uốn của dầm khi dao động; (viết hoa chữ Chuyển)

$EJ$  - độ cứng chống uốn của dầm;

$m$  - khối lượng trên một đơn vị dài của dầm;

Chuyển vị uốn của dầm khi dao động tự do có thể được tính:  $z = y(x) \cdot \sin \omega t$  (2)

Thay (2) vào (1) nhận được:

$$y''''(x) - \beta^4 y(x) = 0 \text{ với } \beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EJ} \quad (3)$$

$\omega$  - tần số góc dao động tự do của dầm.

Nghiệm của phương trình (3) có thể dưới dạng:

$$y(x) = a_1(\operatorname{ch}\beta x + \cos\beta x) + a_2(\operatorname{sh}\beta x + \sin\beta x) + a_3(\operatorname{ch}\beta x - \cos\beta x) + a_4(\operatorname{sh}\beta x - \sin\beta x) \quad (4)$$

Lần lượt lấy đạo hàm (4) theo  $x$ ; thay  $x = l$  vào  $y(x)$ ,  $y'(x)$ ,  $y''(x)$ ,  $y'''(x)$  và tập hợp lại:

$$\left. \begin{aligned} y(l) &= a_1(C+c) + a_2(S+s) + a_3(C-c) + a_4(S-s) \\ y'(l) &= a_1\beta(S-s) + a_2\beta(C+c) + a_3\beta(S+s) + a_4\beta(C-c) \\ y''(l) &= a_1\beta^2(C-c) + a_2\beta^2(S-s) + a_3\beta^2(C+c) + a_4\beta^2(S+s) \\ y'''(l) &= a_1\beta^3(S+s) + a_2\beta^3(C-c) + a_3\beta^3(S-s) + a_4\beta^3(C+c) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Trong đó ký hiệu:  $C = \operatorname{ch}\beta l$ ,  $c = \cos\beta l$ ,  $S = \operatorname{sh}\beta l$ ,  $s = \sin\beta l$ .

Đưa hệ phương trình (5) về dạng ma trận sau:

$$\begin{Bmatrix} y(l) \\ y'(l) \\ y''(l) \\ y'''(l) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C+c & S+s & C-c & S-s \\ \beta(S-s) & \beta(C+c) & \beta(S+s) & \beta(C-c) \\ \beta^2(C-c) & \beta^2(S-s) & \beta^2(C+c) & \beta^2(S+s) \\ \beta^3(S+s) & \beta^3(C-c) & \beta^3(S-s) & \beta^3(C+c) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad \text{hoặc: } \mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \quad (6)$$

Phương trình (6) là hệ thức biểu diễn dạng ma trận véc tơ  $\mathbf{y}_{j+1}$  của đoạn thẳng ở nút bên phải  $x = l$ . Để tìm hệ thức trên của đoạn thẳng ở đầu nút bên trái, thay  $x = 0$  vào hệ phương trình (4) và (5) và tập hợp dưới dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \\ y'''(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad \text{hoặc viết thu gọn: } \mathbf{y}_j = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} \quad (7)$$

Từ (7) rút ra:  $\mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{y}_j$  với  $\mathbf{B}^{-1}$  là ma trận nghịch đảo của  $\mathbf{B}$

Thay  $\mathbf{a}$  vào (6) đưa đến hệ thức liên hệ giữa  $\mathbf{y}_{j+1}$  và  $\mathbf{y}_j$ :  $\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{y}_j$  (8)

Trong thực tế tính toán thường gặp ma trận cột:  $\mathbf{r} = \{y \ \phi \ M \ Q\}^T$  (9)

Để tìm liên hệ giữa  $\mathbf{r}$  và  $\mathbf{y}$  cần chú ý quan hệ lực cắt và mômen uốn của dầm với  $y''$  và  $y'''$ :

$$M = EJ \cdot y''(x); \quad Q = -EJ \cdot y'''(x) \quad (10)$$

Lập hệ thức giữa  $\mathbf{y}$  và  $\mathbf{r}$ :

$$\begin{Bmatrix} y \\ \phi \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EJ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -EJ \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{Bmatrix} \quad \text{hoặc viết gọn: } \mathbf{r} = \mathbf{R} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{y} \quad (11)$$

Từ (11) rút ra:  $\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{r}$  với  $\mathbf{T}^{-1}$  là ma trận nghịch đảo của  $\mathbf{T}$ .

Thay  $\mathbf{y}$  vào (8):  $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{r}_j$  hoặc  $\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{r}_j$ ;  $\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{r}_j$  (12)

Viết ký hiệu dạng:  $\mathbf{C} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{-1}$  là ma trận chuyển tiếp của đoạn thẳng từ nút  $(j+1) \rightarrow (j)$

Thay thế các ma trận  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}^{-1}$  từ (11), (7), (6) để tính  $\mathbf{C}$ , kết quả nhận được như sau:

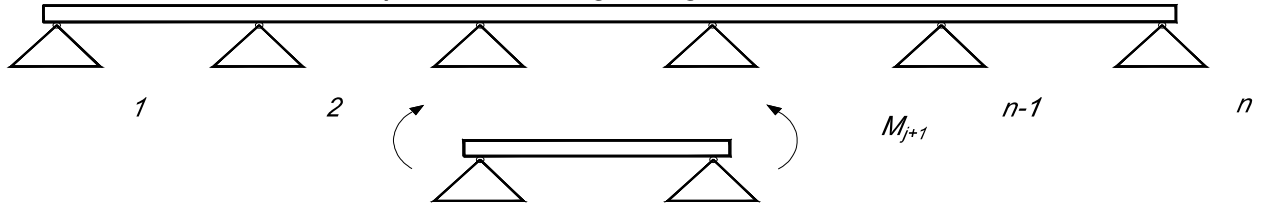
$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (C+c) & (S+s)/\beta & (C-c)/\beta^3 FJ - (S-s)/\beta^3 EJ & \\ (S-s)\beta & (C+c) & (S+s)/\beta EJ & -(C-c)/\beta^2 EJ \\ (C-c)EJ\beta^2 & (S-s)EJ\beta & (C+c) & -(S+s)/\beta \\ -(S+s)EJ\beta^3 & -(C-c)EJ\beta^2 & -(S-s)\beta & (C+c) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Ma trận chuyển tiếp  $\mathbf{C}$  được dùng để tính toán tần số riêng của hệ dầm, khung khi dao động uốn, sẽ được áp dụng để tính toán ở phần tiếp theo.

## 2.2. Dầm tựa trên nhiều gối cứng [2]

Các ma trận chuyển tiếp đã lập được trong phần trên không thể dùng tính trực tiếp cho trường hợp trục hoặc dầm tựa trên nhiều gối cứng. Trong phần này chúng ta sẽ tìm một dạng ma trận để có thể giải quyết được bài toán này.

Cho dầm có tiết diện thay đổi, tựa trên  $n$  gối cứng được đánh số từ 1 đến  $n$  như hình 2:



Hình 2. Sơ đồ dầm tựa trên các gối cứng

Cắt dầm thành nhiều đoạn ở các điểm có gối tựa. Ta có thể lập ma trận chuyển tiếp của đoạn thẳng ở 2 đầu có gối tựa cứng, với điều kiện biên:

$$y_{j+1} = y_j = 0 \quad (14)$$

Theo công thức (8) ta lập liên hệ chuyển tiếp của đoạn thẳng  $j$ , viết dưới dạng ký hiệu:

$$\begin{bmatrix} y \\ \phi \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{j+1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \phi \\ M \\ Q \end{bmatrix}_j \quad (15)$$

Với điều kiện biên ở trên, từ hàng thứ 1 của (15) và từ các hàng 2 và 3 lần lượt rút ra:

$$0 = [C_{12} \quad C_{13} \quad C_{14}] \cdot \begin{Bmatrix} \phi \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_j ; \quad \begin{bmatrix} \phi \\ M \end{bmatrix}_{j+1} = \begin{bmatrix} C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{32} & C_{33} & C_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_j \quad (16)$$

Từ (16) có thể viết và biến đổi như sau:

$$0 = [C_{12} \quad C_{13}] \cdot \begin{Bmatrix} \phi \\ M \end{Bmatrix}_j + C_{14} \cdot Q_j \rightarrow Q_j = \left[ -\frac{C_{12}}{C_{14}} - \frac{C_{13}}{C_{14}} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \phi \\ M \end{Bmatrix}_j \quad (17)$$

Với  $Q_j$  tìm được ở (17), lập hệ thức:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{j+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{C_{12}}{C_{14}} & -\frac{C_{13}}{C_{14}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi \\ Q \end{Bmatrix}_j \rightarrow \begin{bmatrix} \phi \\ M \end{bmatrix}_{j+1} = \begin{bmatrix} C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{32} & C_{33} & C_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{C_{12}}{C_{14}} & -\frac{C_{13}}{C_{14}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi \\ M \end{Bmatrix}_j$$

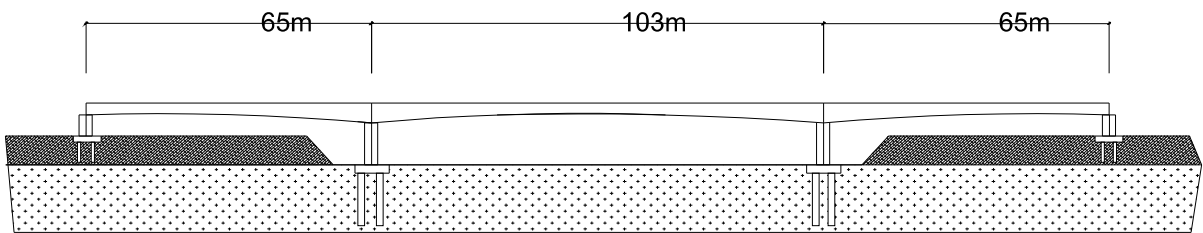
Sau khi nhân 2 ma trận, hệ thức chuyển tiếp của đoạn dầm  $j$  với 2 đầu có gối tựa cứng:

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ M \end{bmatrix}_{j+1} = \begin{bmatrix} C_{22} - C_{24} \frac{C_{12}}{C_{14}} & C_{23} - C_{24} \frac{C_{13}}{C_{14}} \\ C_{32} - C_{34} \frac{C_{12}}{C_{14}} & C_{33} - C_{34} \frac{C_{13}}{C_{14}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi \\ M \end{Bmatrix}_j \quad \text{hoặc:} \quad \begin{bmatrix} \varphi \\ M \end{bmatrix}_{j+1} = [C_j^A] \cdot \begin{Bmatrix} \varphi \\ M \end{Bmatrix}_j \quad (18)$$

$$\text{Trong đó:} \quad [C_j^A] = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* \\ C_{21}^* & C_{22}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{S-s} \begin{bmatrix} cS-sC & (cC-1)/\beta EJ \\ -2sS\beta EJ & cS-sC \end{bmatrix} \quad (19)$$

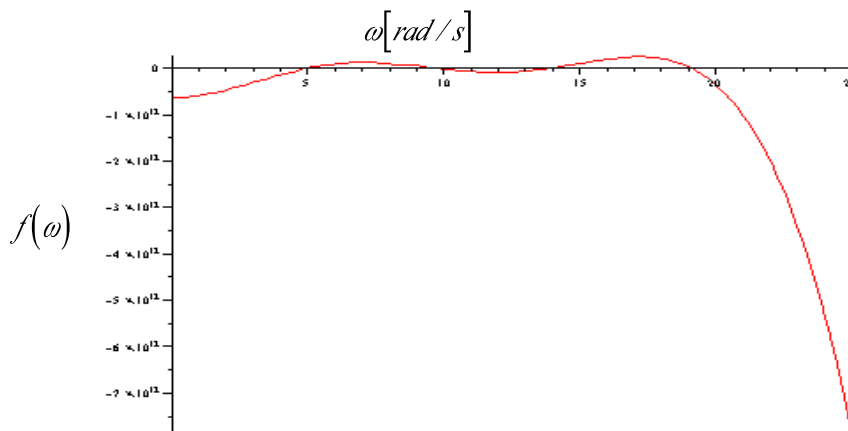
### 3. Tính toán thực tế

Cầu liên tục 3 nhịp có tiết diện biến đổi, chiều dài 233m với sơ đồ nhịp 65+103+65m như hình 3. Các thông số  $EJ$ ,  $m$ ,  $I$  được trình bày chi tiết trong [4].



Hình 3. Mô hình cầu liên tục 3 nhịp có tiết diện biến đổi

Trong ví dụ này, ta lập được hàm đa thức  $f(\omega)$  bậc  $n$ . Sử dụng phương pháp tìm nghiệm bằng phần mềm Maple thông qua việc tìm điểm giao cắt giữa đồ thị hàm  $f(\omega)$  và trục hoành, tìm được các nghiệm là các tần số dao động riêng  $\omega$  như trên hình 4:



Hình 4. Kết quả tính toán tần số dao động riêng của cầu

Bảng 1. So sánh kết quả tính toán

Tần số riêng (rad/s)	Phương pháp phần tử hữu hạn (sử dụng phần mềm Sap 2000)	Phương pháp ma trận chuyển tiếp	Sai số (%)
$\omega_1$	4,91	5,02	2,19
$\omega_2$	10,12	10,63	4,80
$\omega_3$	12,85	13,85	7,22

#### 4. Kết luận

Mục đích của bài báo này là trình bày phương pháp ma trận chuyển tiếp (ma trận truyền) để tính toán tần số dao động riêng của cầu liên tục. Phương pháp này đặc biệt phù hợp với các kết cấu dạng dầm liên tục có tiết diện thay đổi. Tuy nhiên, nó chỉ thích hợp với việc lập trình tính toán trên máy tính có cấu hình mạnh vì khối lượng tính toán rất lớn khi chia nhỏ kết cấu để tăng mức độ chính xác của kết quả (trong ví dụ tính toán ở trên, các tác giả đã chia cầu thành 37 đoạn dầm có  $EJ$ ,  $m$ ,  $I$  khác nhau; như vậy, theo lý thuyết phải nhân 37 ma trận cấp 4 để tìm ra phương trình phi tuyến ẩn số  $\omega$ ). Chương trình tính đã thiết lập cho kết quả tính toán phù hợp tốt với kết quả tính toán bằng phần mềm Sap 2000, điều đó khẳng định sự đúng đắn của chương trình tính. Hướng phát triển tiếp của bài báo là nghiên cứu tính toán dao động cưỡng bức của cầu liên tục bằng phương pháp đã nêu trên.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Văn Khang, *Dao động kỹ thuật*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2001.
- [2] Nguyễn Ngọc Quỳnh, Hồ Thuần, *Ứng dụng ma trận trong kỹ thuật*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1976.
- [3] Phạm Văn Thứ, *Ổn định và động lực học công trình*, NXB Hải Phòng, Hải Phòng, 2002.
- [4] Ngô Việt Anh, Đỗ Đình Phú, *Đề tài NCKHSV Tính toán dao động tự do của cầu liên tục bằng phương pháp ma trận chuyển tiếp*, Đại học Hàng hải Việt Nam, Hải Phòng, 2014.

*Người phản biện: TS. Thẩm Bội Châu*

### MỘT SỐ THÀNH TỰU TRÊN LĨNH VỰC KINH TẾ HÀNG HẢI Ở HẢI PHÒNG (2005 - 2010)

ACHIEVEMENTS OF MARITIME ECONOMY IN HAIPHONG (2005 - 2010)

ThS. NGUYỄN THỊ THANH

*Khoa Lý luận Chính trị, Trường ĐHHH Việt Nam*

#### **Tóm tắt**

*Kinh tế hàng hải là một thế mạnh của Thành phố Hải Phòng. Bài viết phân tích một số thành tựu trên lĩnh vực kinh tế hàng hải ở Hải Phòng (2005 - 2010), bao gồm: vận tải biển (vận tải hành khách và vận tải hàng hóa), dịch vụ cảng biển, công nghiệp đóng và sửa chữa tàu biển.*

#### **Abstract**

*Maritime Economy is the strength of Haiphong City. The paper would analyze a number of achievements in the field of maritime economy in Haiphong (2005 - 2010), including sea transport (passenger transport and freight), port services, shipbuilding and repairing industry.*

#### **1. Giới thiệu**

Trong Quyết định số 1601/QĐ - TTg được Thủ tướng phê duyệt ngày 15/10/2009 đã nêu rõ mục tiêu của Chiến lược biển Việt Nam đến năm 2020 (Nhằm thực hiện Nghị quyết **Chiến lược biển Việt Nam đến năm 2020** của Ban Chấp hành Trung ương Đảng khoá X đề ra), kinh tế hàng hải đứng thứ hai và sau năm 2020 kinh tế hàng hải đứng đầu trong 5 lĩnh vực phát triển kinh tế biển; đồng thời góp phần củng cố an ninh, quốc phòng của đất nước. Là thành phố cảng quốc tế, đô thị loại I cấp quốc gia, trung tâm công nghiệp, thương mại, dịch vụ, du lịch của Việt Nam và khu vực duyên hải, giữ vị trí trọng yếu về an ninh - quốc phòng, Hải Phòng được xác định là một trung tâm phát triển kinh tế biển của quốc gia. Trong đó, kinh tế hàng hải được coi là một thế mạnh của Thành phố.

#### **2. Đối với vận tải biển**

Vận tải biển là một nội dung quan trọng của phát triển kinh tế hàng hải ở Hải Phòng. Những kết quả vận tải biển đạt được trên hai khía cạnh: vận tải hành khách và vận tải hàng hóa.

##### **2.1. Vận tải hành khách**

Việt Nam có 3.260 km bờ biển, nằm ở vị trí xung yếu trên biển Đông, thuận lợi cho vận tải hàng hoá, hành khách và phát triển du lịch bằng tàu biển. Tuy nhiên, ngành hàng hải Việt Nam và đội tàu biển chủ yếu làm nhiệm vụ vận tải hàng hoá, còn vận tải hành khách và du lịch trên biển gần như từ lâu bị bỏ trống, không mấy hấp dẫn đối với các chủ tàu.