MỘT QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM HAI BIẾN DẠNG THƯƠNG
A RULE TO FIND THE EXTREMA OF THE QUOTIENT OF TWO-VARIABLE FUNCTIONS

TS. HOÀNG VĂN HÙNG
Viện Khoa học Cơ bản, Trường ĐHHH Việt Nam

Tóm tắt:

Giả sử $z=\frac{u(x,y)}{v(x,y)}$ *là hàm hai biến có tập xác định là miền mở khác rỗng* $D\subset R^2$, *các hàm hai biến* $u(x,y), v(x,y)$ *có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai trong miền* D. *Đặt :*

$$L(x,y,\lambda)=u(x,y)+\lambda v(x,y)$$

$$p=v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ q=v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\ r=v\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-u\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

Tác giả chỉ ra rằng quy tắc thông thường tìm cực trị không điều kiện của hàm $z=\frac{u(x,y)}{v(x,y)}$ *trên miền* D *được đưa về quy tắc dưới đây:*

Bước 1: Tìm tập các điểm dừng của hàm z *bằng cách giải hệ sau:*

$$\left\{\frac{\partial L}{\partial x}=0;\ \frac{\partial L}{\partial y}=0;\ L(x,y,\lambda)=0,\ (x,y)\in D\right\},$$

trong đó, (x^*,y^*) *là một điểm dừng của* $z \Leftrightarrow \exists\lambda^*\subset R\ (x^*,y^*,\lambda^*)$ *là một nghiệm của hệ trên.*

Bước 2: Giả sử (x^*,y^*) *là một điểm dừng của* z, *đặt:*

$$p^*=p(x^*,y^*),\ q^*=q(x^*,y^*),\ r^*=r(x^*,y^*),\ \delta^*=r^{*2}-p^*q^*.$$

Nếu $\delta^*>0$, *hàm* z *không có cực trị tại* (x^*,y^*). *Nếu* $\delta^*<0\ \&\ p^*<0$ *hoặc* $\delta^*<0\ \&\ q^*<0$, *hàm* z *đạt cực đại tại* (x^*,y^*) *và* $z_{max}=z(x^*,y^*)=-\lambda^*$. *Nếu* $\delta^*<0\ \&\ p^*>0$ *hoặc* $\delta^*<0\ \&\ q^*>0$, *hàm* z *đạt cực tiểu tại* (x^*,y^*) *và* $z_{\min}=z(x^*,y^*)=-\lambda^*$.

Abstract:

Let $z=\frac{u(x,y)}{v(x,y)}$ *be a function of two variables whose domain of definition is an open non-empty set* $D\subset R^2$ *and* $u(x,y), v(x,y)$ *be functions of two variables whose second partial derivatives are continuous over* D. *Put*

$$L(x,y,\lambda)=u(x,y)+\lambda v(x,y)$$

$$p=v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ q=v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\ r=v\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-u\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

The author showed that the normal rule to find the unconditional extrema of the function $z=\frac{u(x,y)}{v(x,y)}$ *in* D *can be reduced to the following rule:*

Step 1: Find the set of the stationary points of z *by solving the system*

$$\left\{\frac{\partial L}{\partial x}=0;\ \frac{\partial L}{\partial y}=0;\ L(x,y,\lambda)=0,\ (x,y)\in D\right\},$$

where (x^*, y^*) *is a stationary point of* $z \Leftrightarrow \exists \lambda^* \subset R$ (x^*, y^*, λ^*) *is a solution of the above system.*

Step 2: Assume that (x^*, y^*) *is a stationary point of* z*. Put*

$$p^* = p(x^*, y^*),\ q^* = q(x^*, y^*),\ r^* = r(x^*, y^*),\ \delta^* = r^{*2} - p^* q^*$$

If $\delta^* > 0$ *the function* z *fails to have an extremum at* (x^*, y^*)*. If* $\delta^* < 0\ \&\ p^* < 0$ *or* $\delta^* < 0\ \&\ q^* < 0$ *the function* z *has one maximum at* (x^*, y^*) *and* $z_{max} = z(x^*, y^*) = -\lambda^*$*. If* $\delta^* < 0\ \&\ p^* > 0$ *or* $\delta^* < 0\ \&\ q^* > 0$ *the function* z *has one minimum at* (x^*, y^*) *and* $z_{\min} = z(x^*, y^*) = -\lambda^*$ *.*

1. Đặt vấn đề

Đạo hàm riêng của hàm số hai biến có dạng thương $z = \dfrac{u(x,y)}{v(x,y)}$ là một biểu thức cồng kềnh. Điều này gây khó khăn cho việc tìm cực trị (không điều kiện) của các hàm có dạng thương, do quy tắc tìm cực trị của hàm hai biến khả vi đòi hỏi phải tính các đạo hàm riêng của chúng. Bởi vậy, cải tiến quy tắc tìm cực trị thông thường, đưa ra được một quy tắc tìm cực trị với các công thức đơn giản hơn cho các hàm dạng thương có ý nghĩa thực tiễn trong việc giảng dạy phần lý thuyết cực trị của hàm hai biến. Bài báo này dành cho vấn đề vừa nêu.

2. Kết quả chính

Dựa trên điều kiện cần và điều kiện đủ để một hàm hai biến khả vi liên tục đến cấp hai trên miền mở $D \subset R^2$ có cực trị tại một điểm $(x^*, y^*) \in D$, tác giả chỉ ra rằng quy tắc thông thường tìm cực trị không điều kiện của hàm $z = \dfrac{u(x,y)}{v(x,y)}$ trên miền D được đưa về quy tắc cho bởi định lý sau:

2.1. Định lý: Giả sử $z = \dfrac{u(x,y)}{v(x,y)}$ là hàm hai biến có tập xác định là miền mở khác rỗng $D \subset R^2$, các hàm hai biến $u(x,y), v(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai trong miền D. Đặt :

$$L(x, y, \lambda) = u(x,y) + \lambda v(x,y)$$

$$p = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ q = v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\ r = v\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - u\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

Khi đó quy tắc thông thường tìm cực trị của hàm hai biến $z = \dfrac{u(x,y)}{v(x,y)}$ được đưa về quy tắc dưới đây:

Bước 1: *Tìm tập các điểm dừng của hàm* z *bằng cách giải hệ sau:*

$$\left\{\frac{\partial L}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0;\ L(x, y, \lambda) = 0,\ (x, y) \in D\right\},$$

trong đó, (x^*, y^*) *là một điểm dừng của* $z \Leftrightarrow \exists \lambda^* \subset R$ (x^*, y^*, λ^*) *là một nghiệm của hệ trên.*

Bước 2: *Giả sử* (x^*, y^*) *là một điểm dừng của* z*, đặt:*

$$p^* = p(x^*, y^*),\ q^* = q(x^*, y^*),\ r^* = r(x^*, y^*),\ \delta^* = r^{*2} - p^* q^* .$$

Nếu $\delta^*>0$, *hàm* z *không có cực trị tại* (x^*,y^*). *Nếu* $\delta^*<0\,\&\,p^*<0$ *hoặc* $\delta^*<0\,\&\,q^*<0$, *hàm* z *đạt cực đại tại* (x^*,y^*) *và* $z_{max}=z(x^*,y^*)=-\lambda^*$. *Nếu* $\delta^*<0\,\&\,p^*>0$ *hoặc* $\delta^*<0\,\&\,q^*>0$, *hàm* z *đạt cực tiểu tại* (x^*,y^*) *và* $z_{\min}=z(x^*,y^*)=-\lambda^*$.

Chứng minh. Lấy đạo hàm riêng theo các biến x,y đối với hàm $z=\dfrac{u(x,y)}{v(x,y)}$ ta được:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{v\dfrac{\partial u}{\partial x}-u\dfrac{\partial v}{\partial x}}{v^2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{v\dfrac{\partial u}{\partial y}-u\dfrac{\partial v}{\partial y}}{v^2}$$

Hệ phương trình xác định điểm dừng của hàm z là:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\\(x,y)\in D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v\dfrac{\partial u}{\partial x}-u\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\ \ v\dfrac{\partial u}{\partial y}-u\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\(x,y)\in D\end{cases}\tag{1}$$

Do $v(x,y)\neq 0$ trên D, hệ (1) tương đương với hệ

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{u}{v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{u}{v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\(x,y)\in D\end{cases}\tag{2}$$

Đặt $L(x,y,\lambda)=u(x,y)+\lambda v(x,y)$ ta có $L=u+\lambda v=0\Leftrightarrow\lambda=-\dfrac{u}{v}$. Do đó một điểm $(x,y)\in D$ là nghiệm của hệ (2) khi và chỉ khi (x,y,λ) là một nghiệm của hệ

$$\left\{\frac{\partial L}{\partial x}=0;\ \frac{\partial L}{\partial y}=0;\ L(x,y,\lambda)=0,\ (x,y)\in D\right\}\tag{3}$$

Vậy sự hợp lý của quy tắc tìm tập các điểm dừng của hàm z trong miền D chỉ ra trong bước 1 được chứng minh.

Lấy đạo hàm riêng cấp 2 hàm $z=\dfrac{u(x,y)}{v(x,y)}$ ta được:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{1}{v^2}(v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})-\frac{2}{v^3}\frac{\partial v}{\partial x}(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x})\\\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{1}{v^2}(v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})-\frac{2}{v^3}\frac{\partial v}{\partial y}(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y})\\\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}&=\frac{1}{v^2}(v\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-u\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x})-\frac{1}{v^3}[\frac{\partial v}{\partial y}(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial v}{\partial x}(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y})]\end{aligned}\tag{4}$$

Với các ký hiệu đưa ra trong phát biểu của định lý 2.1, từ (4) ta có: nếu (x^*,y^*) là một nghiệm của hệ (1) thì:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x^*,y^*)=\frac{1}{v(x^*,y^*)^2}p(x^*,y^*)=\frac{p^*}{v(x^*,y^*)^2}\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x^*,y^*)=\frac{1}{v(x^*,y^*)^2}q(x^*,y^*)=\frac{q^*}{v(x^*,y^*)^2}\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(x^*,y^*)=\frac{1}{v(x^*,y^*)^2}r(x^*,y^*)=\frac{r^*}{v(x^*,y^*)^2}
\end{aligned}\qquad (5)$$

Từ (5) ta suy ra $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x^*,y^*)$ cùng dấu với p^*, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x^*,y^*)$ cùng dấu với q^*, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(x^*,y^*)$ cùng dấu với r^*, đại lượng :

$$\delta=(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(x^*,y^*))^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x^*,y^*).\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x^*,y^*)=\frac{1}{v(x^*,y^*)^4}(r^{*2}-p^*q^*)$$

cùng dấu với đại lượng $\delta^*=r^{*2}-p^*q^*$. Vậy từ điều kiện đủ đối với cực trị của hàm hai biến ta suy ra sự hợp lý của bước 2. Nếu z đạt cực trị tại (x^*,y^*) thì do (x^*,y^*,λ^*) là nghiệm của hệ (3) ta suy ra $z_{\text{ext}}=z(x^*,y^*)=\frac{u(x^*,y^*)}{v(x^*,y^*)}=-\lambda^*$. Chứng minh kết thúc.

Nhận xét: Tính toán các biểu thức p^*,q^*,r^*,δ^* rõ ràng đơn giản hơn tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm $z=\frac{u(x,y)}{v(x,y)}$ và biểu thức δ. Vì vậy, quy tắc tìm cực trị cho bởi định lý 2.1 tiện lợi hơn quy tắc tìm cực trị thông thường khi cần tìm cực trị của các hàm hai biến có dạng thương.

2.2. Hệ quả: Giả sử $v(x,y)$ là hàm có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên miền mở $D\subset R^2$ và:

$$v\neq 0,\delta_v=(\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x})^2-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}<0 \text{ trên miền } D;\ a,b,c\in\mathbb{R} \text{ thỏa mãn } a^2+b^2+c^2>0.$$

Nếu tập nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}
a+\lambda\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\
b+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}=0\\
(ax+by+c)+\lambda v(x,y)=0\\
(x,y)\in D
\end{cases}\qquad (6)$$

khác rỗng thì với mỗi nghiệm (x^*,y^*,λ^*) của hệ (6) hàm $z=\frac{ax+by+c}{v(x,y)}$ có cực trị tại (x^*,y^*) và giá trị cực trị $z_{ext}=z(x^*,y^*)=-\lambda^*$.

Chứng minh. Khi $u=ax+by+c$ hệ (3) trở thành hệ (6) và các đại lượng p,q,r trở thành:

$$p=-u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ q=-u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\ r=-u\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

Do đó đại lượng δ^* trở thành:

$$\delta^* = r^{*2} - p^* q^* = u(x^*, y^*)^2 [(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x^*, y^*))^2 - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x^*, y^*).\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x^*, y^*)]$$

Xét trường hợp $a = b = 0, c \neq 0$. Khi đó $u(x^*, y^*) = c \neq 0$ và từ giả thiết suy ra:

$$\delta^* = c^2 [(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x^*, y^*))^2 - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x^*, y^*).\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x^*, y^*)] < 0$$

Vậy khẳng định của hệ quả suy ra từ định lý 2.1.

Xét trường hợp $a^2 + b^2 > 0$. Khi đó nếu (x^*, y^*, λ^*) là một nghiệm của hệ (6) thì $\lambda^* \neq 0 \Rightarrow u(x^*, y^*) = -\lambda^* v(x^*, y^*) \neq 0$. Vậy từ giả thiết của hệ quả suy ra:

$$\delta^* = r^{*2} - p^* q^* = u(x^*, y^*)^2 [(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x^*, y^*))^2 - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x^*, y^*).\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x^*, y^*)] < 0$$

Vậy khẳng định của hệ quả lại suy ra từ định lý 2.1.

Ví dụ 1: Tìm cực trị của hàm hai biến $z = \dfrac{ax + by + c}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ nếu $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ (bài toán số 3630[1]).

Giải. Tập xác định D của hàm $z = \dfrac{ax + by + c}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ là $\mathbb{R}^2$. Đặt $v = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ ta có:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1 + x^2}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{xy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\delta_v = -\frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} < 0 \quad (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

Vậy các điều kiện của hệ quả 2.2 được thỏa mãn. Hệ (6) trong bài toán này có dạng:

$$\begin{cases} a + \dfrac{\lambda x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} = 0 \\ b + \dfrac{\lambda y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} = 0 \\ ax + by + c + \lambda \sqrt{1 + x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Nếu $c = 0$ thì $a^2 + b^2 > 0$ và hệ (7) vô nghiệm. Nếu $c > 0$, hệ (7) có nghiệm duy nhất:

$$(x^* = \frac{a}{c}, y^* = \frac{b}{c}, \lambda^* = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$$

Hệ có một cực trị duy nhất tại điểm $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$. Đây là cực đại vì $p^* = -\dfrac{c^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} < 0$,

$z_{max} = -\lambda^* = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Nếu $c < 0$ hệ (7) có nghiệm duy nhất:

$$(x^* = \frac{a}{c}, y^* = \frac{b}{c}, \lambda^* = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$$

Hệ có một cực trị duy nhất tại điểm $(\frac{a}{c},\frac{b}{c})$. Đây là cực tiểu vì $p^* = \frac{c^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} > 0$,

$z_{\min} = -\lambda^* = -\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm hai biến $z = \frac{x^2+y^2}{1-x^4-y^4}$

Giải. Tập xác định của hàm $z = \frac{x^2+y^2}{1-x^4-y^4}$ là $D = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x^4+y^4 \neq 1\}$. Đặt:

$$L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(1-x^4-y^4)$$

ta có hệ phương trình xác định điểm dừng của hàm z là:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=0, \frac{\partial L}{\partial y}=0 \\ L(x,y,\lambda)=0 \\ x^4+y^4\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4\lambda x^3=0,\ 2y-4\lambda y^3=0 \\ x^2+y^2+\lambda(1-x^4-y^4)=0 \\ x^4+y^4\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ \lambda=0 \end{cases}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng duy nhất O(0,0). Tính các biểu thức p,q,r ta có:

$$p = 2+10x^4-2y^4+12x^2y^2,\ q = 2-2x^4+10y^4+12x^2y^2,\ r=0$$

Từ đó ta có $p^* = p(0,0) = 2,\ q^* = q(0,0) = 2,\ r^* = r(0,0) = 0$, $\delta^* = r^{*2} - p^*q^* = -4$. Áp dụng quy tắc đã nêu ta suy ra z có một cực trị duy nhất là giá trị cực tiểu $z_{\min} = z(0,0) = 0$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] **Б. П. Демидович**. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Издательство “Наука”, 1972.

Người phản biện: TS. Phạm Văn Minh; TS. Đoàn Quang Mạnh (ĐHHP)

NGHIÊN CỨU, ĐÁNH GIÁ KHẢ NĂNG XÚC TÁC CỦA MỘT SỐ PHỨC ĐỒNG THỂ TRONG PHẢN ỨNG CATALAZA

INVESTIGATION, EVALUATION THE CATALYTIC ABILITY OF SOME HOMOGENEOUS COMPLEXES IN CATALAZA REACTION

TS. NGÔ KIM ĐỊNH
Bộ Giao thông vận tải

Tóm tắt

Kết quả nghiên cứu cho thấy các phức chất nghiên cứu đều có hoạt tính xúc tác với quá trình Catalaza; hoạt tính xúc tác của mỗi phức phụ thuộc vào bản chất của cation kim loại, ligan tạo phức và điều kiện phản ứng.

Abstract

Studying results showed that, all researched complexes regular catalysis action with catalaza process; catalysis action of complexes depend on nature of metal cation and making up complex ligan, and react conditions.

1. Mở đầu

H_2O_2 đã được loài người phát minh và sử dụng từ lâu đời do khả năng oxi hóa khá mạnh và dễ điều chế của nó. Đặc biệt, sau phát minh của Fenton (1894) về khả năng xúc tác của $FeSO_4/H_2SO_4$ đối với quá trình phân hủy H_2O_2 thành các gốc tự do, trong đó có gốc tự do OH*, đã làm tăng khả năng ô xy hóa của H_2O_2 lên nhiều lần. Do vậy, ứng dụng của H_2O_2 đã được mở rộng trong nhiều lĩnh vực và cho kết quả thật đáng kinh ngạc [5,11].

Quá trình phân hủy H_2O_2 xảy ra theo sơ đồ: