
MỞ ĐẦU

1. Tính cấp thiết của đề tài

Hiện nay để phục vụ cho việc tính toán kết cấu công trình hiện nay có rất nhiều phương pháp tính toán trong đó phương pháp được sử dụng chủ yếu là các phương pháp phần tử hữu hạn với rất nhiều phần mềm hỗ trợ như Ansys, Sap 2000, Etab, Abaqus... Phương này sử dụng rất tốt cho các kết cấu thông thường tuy nhiên với các kết cấu đặc biệt nhất là đối với các kết cấu có hình dạng phức tạp như mặt cong, đường cong thì việc tính toán gặp phải nhiều khó khăn, khối lượng tính toán lớn do việc chia lưới rất phức tạp dễ dẫn đến sai số lớn.

Dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn, để giải quyết các vấn đề trên đã có một số phương pháp số khác được đưa ra như phương pháp phần tử biên, X-FEM, phương pháp đẳng hình học... trong đó phương pháp đẳng hình học là phương pháp có nhiều ưu điểm cần được nghiên cứu để ứng dụng vào công tác nghiên cứu khoa học và giảng dạy

2. Mục đích

Nghiên cứu, giới thiệu phương pháp đẳng hình học và đưa ra được ví dụ tính toán cho một bài toán liên quan đến kết cấu công trình.

3. Nội dung và phương pháp nghiên cứu

Trình bày một cách tổng quan về phương pháp đẳng hình học, ứng dụng chương trình vào tính toán bài toán phẳng.

Phương pháp nghiên cứu: kết hợp lý thuyết và ứng dụng phần mềm Matlab xây dựng chương trình tính và so sánh kết quả tính toán với lý thuyết và chương trình Sap.

4. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Đề tài hoàn thành sẽ là cơ sở cho công tác giáo dục, công tác nghiên cứu khoa học cho phép ứng dụng trong thực tế.

Tổng quan về đề tài

1.1 Tổng quan về các phương pháp số

Phương pháp số hay còn gọi là giải tích số là môn khoa học chuyên nghiên cứu cách giải gần đúng, đa phần là các phương trình, các bài toán xấp xỉ hàm số và các bài toán tối ưu[2]. Ngày nay, các pháp tính số đã và đang phát triển rất mạnh mẽ và trở thành công cụ để giải toán các bài toán khoa – học kỹ thuật như phương pháp sai phân hữu hạn, phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp phần tử biên, phương pháp phân tích đẳng hình học...

1.2 Tình hình ứng dụng phương pháp số trong tính toán kết cấu công trình

Ngày nay với sự phát triển của công nghệ thông tin hầu hết các công việc tính toán đều được thực hiện bởi máy tính. Trong lĩnh vực tính toán kết cấu hiện đã có rất nhiều phần mềm hỗ trợ tính toán đối sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn như: Ansys, Abaqus, Sap, Etab, LS-DYNA... giúp cho việc tính toán dễ dàng và nhanh hơn rất nhiều. Còn đối với các phương pháp số khác như phần tử biên, sai phân hữu hạn, phân tích đẳng hình học việc tính toán còn hạn chế do chưa có nhiều phần mềm thương mại, chủ yếu các nhà nghiên cứu sử dụng các ngôn ngữ lập trình như C, C++, Fortran, Matlab, Maple. Các phương pháp số đã giải quyết hầu hết được các bài toán trong tính toán kết cấu từ bài toán đơn giản đến phức tạp. Tuy nhiên các phần mềm sử dụng phương pháp số ngày càng đòi hỏi cấu hình máy tính cao và thời gian tính toán kéo dài trong trường hợp kết cấu phức tạp. Vì vậy đòi hỏi việc đưa ra phương pháp số mới giảm được khối lượng tính toán trong khi kết quả thu được vẫn chính xác là cấp thiết, phương pháp phân tích đẳng hình học với các ưu điểm của mình đã phần nào đáp ứng được yêu cầu đó.

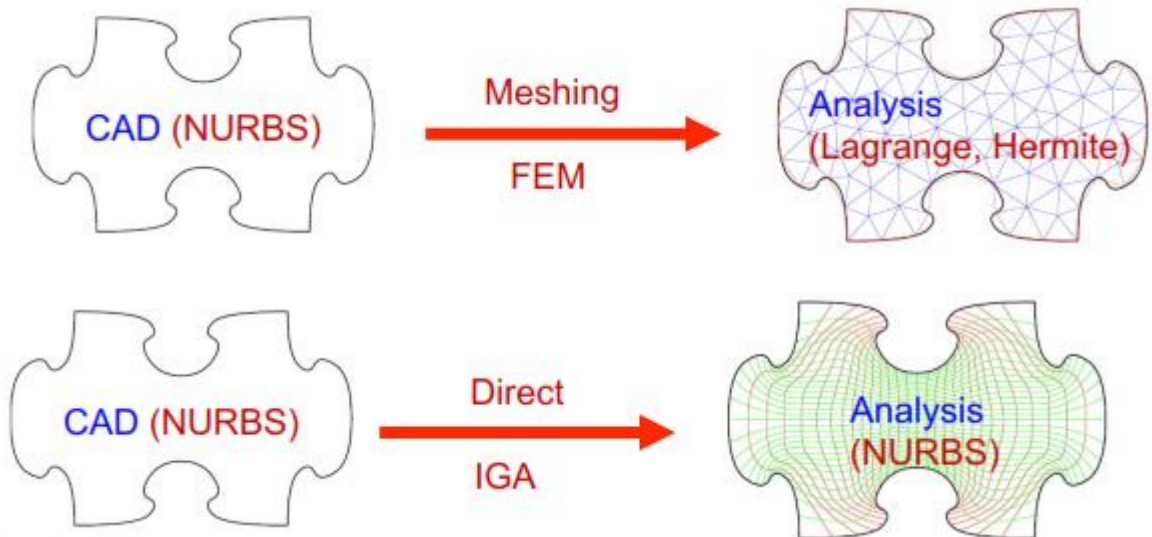
Phương pháp đẳng hình học được giáo sư T. Huges và các cộng sự đề xuất năm 2005, tuy thời gian phát triển chưa lâu nhưng trên thế giới đã có một số nhà khoa học nghiên cứu về phương pháp đẳng hình học như Dokken, Costantini, Nguyễn Xuân Hùng, A.Cazzani, Z.Yang... Trong nước PGS.TS Nguyễn Xuân Hùng đã có nhiều công trình nghiên cứu về phương pháp phân tích đẳng hình học được công bố trong và ngoài nước; ngoài ra một số nhà nghiên cứu như Nguyễn Công Minh, Trần Tuấn Anh – trường Đại học Mở thành phố Hồ Chí Minh; Đỗ Văn Hiến – Đại học Sư phạm Kỹ thuật thành phố

Hồ Chí Minh. Lĩnh vực nghiên cứu mới ở mức tổng quan hoặc đi sâu vào phương pháp phân tích đẳng hình học, tuy nhiên chưa đi cụ thể vào chuyên ngành hẹp nào.

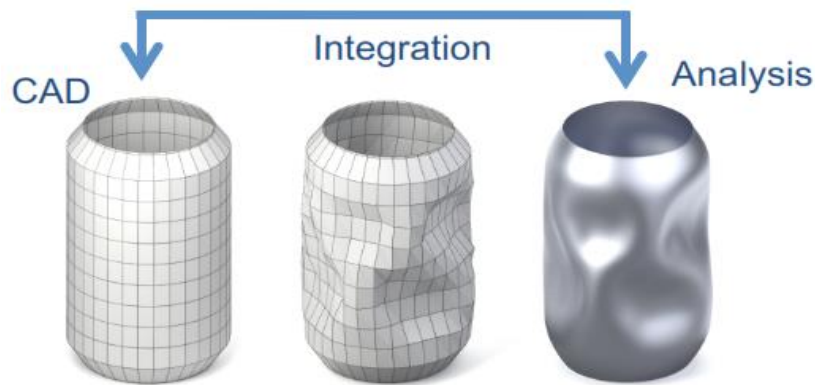
Phương pháp phân tích đẳng hình học

2.1 Tổng quan về hàm cơ sở B - Spiline

Phương pháp phân tích đẳng hình học “Isogeometric analysis” hay được viết tắt là IGA được giáo sư T.Huges và các cộng sự đưa ra vào năm 2005 dựa trên ý tưởng sử dụng các hàm mô phỏng trong các phần mềm CAD cho việc chia lưới và chia phần tử tính toán trong phương pháp phần tử hữu hạn. Khác với phần tử hữu hạn sau khi xây dựng được mô hình trên các phần mềm CAD cần có bước chia lại lưới su đó chuyển qua quá trình phân tích và tối ưu hóa kết cấu, IGA sử dụng luôn mô hình kết cấu từ CAD trong bước phân tích và tối ưu hóa kết cấu.



Hình 2-1. So sánh việc chia lưới trong FEM và IGA



Hình 2-2. Minh họa việc sử dụng mô hình CAD trực tiếp trong IGA

IGA sử dụng trực tiếp mô hình từ CAD, thay vì sử dụng đa thức Lagrange cho việc xấp xỉ hình học và chuyển vị sẽ sử dụng B – Spline và Nurbs (Non uniform rational B-Spline với nhiều ưu điểm hơn.

2.1.1 Hàm cơ sở B – Spline và hàm Nurbs[3, 4]

B – Spline là hàm cơ sở dùng để biểu diễn đường cong từ năm 1972 còn Nurbs là dạng tổng quát hóa của đường cong B – Spline với khả năng biểu diễn chính xác các đường “conic” (đường tròn, đường elip). Nurbs bắt đầu được sử dụng trong thiết kế kỹ thuật từ năm 1972. Ban đầu Nurbs chỉ được ưu tiên trong lĩnh vực xe hơi, hàng không, ngày nay Nurbs đã có mặt trong tất cả các gói CAD chuẩn.

2.1.1.1 Véc tơ nút (Knot véc tơ)

Véc tơ Knot (hay còn gọi là véc tơ nút) $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ là một chuỗi các giá trị tham số không giảm, $\xi_i < \xi_{i+1}$, $i = 1 \div n + p + 1$; trong đó $\xi_i \in \mathbb{R}$ là knot (nút) thứ i , i được gọi là chỉ số nút, p là bậc của hàm cơ sở còn n là số hàm cơ sở được sử dụng để xây dựng đường cong B – Spline.

Nếu các điểm knot được chia cách đều nhau thì vector Knot được gọi là đều. Một hàm cơ sở B – Spline sẽ liên tục C^∞ bên trong một khoảng knot $[\xi_i, \xi_{i+1})$ với điều kiện $\xi_i < \xi_{i+1}$ nghĩa là khoảng này được tạo ra từ hai knot có giá trị khác nhau và liên tục C^{p-1} tại một giá trị knot riêng biệt. Một giá trị knot có thể xuất hiện nhiều lần và số lần xuất hiện của nó trong vector knot được gọi là bội của knot đó.

Trong trường hợp tổng quát, một đường cong B-spline sẽ không đi qua hai điểm điều khiển đầu và cuối, nó chỉ đi qua nếu điểm knot đầu và cuối có bội là $p+1$ và một vector knot như vậy được gọi là vector knot mở. Hiện nay, thông thường khi thiết kế một đường cong, chỉ yêu cầu định rõ điểm đầu và điểm cuối nên vector knot trong các chương trình CAD là mở.

2.1.1.2 Hàm cơ sở (basis function)

Nếu cho một véc tơ Knot thì các hàm cơ sở được định nghĩa đệ quy bắt đầu với $p = 0$ như sau:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Với $p \geq 1$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi).$$

2.1.1.3 Đường cong và bề mặt B – Spline

Đường cong B – Spline được xác định bằng tổ hợp tuyến tính của các điểm điều khiển và các hàm cơ sở tương ứng

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i$$

\mathbf{P}_i : điểm điều khiển (control point) thứ i ;

$N_{i,p}(\xi)$: là hàm cơ sở B – Spline thứ i có bậc là p

Bề mặt B – Spline được định dựng bằng tích ten xơ của các hàm cơ sở B – Spline một chiều, hai vector Knot và một lưới các điểm điều khiển $P_{i,j}$ hai chiều $n \times m$:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) P_{i,j}$$

M và N là các hàm cơ sở B – Spline theo phương ξ và η tương ứng

Bề mặt B – Spline còn được định nghĩa như sau:

$$S(\xi, \eta) = \sum_A^{n \times m} N_A(\xi, \eta) P_A$$

$N_A(\xi, \eta)$: là hàm dạng liên quan đến nút A .

2.1.1.4 Hình học Nurbs

Hình học Nurbs là sự tổng quát hóa của hình học B – Spline.

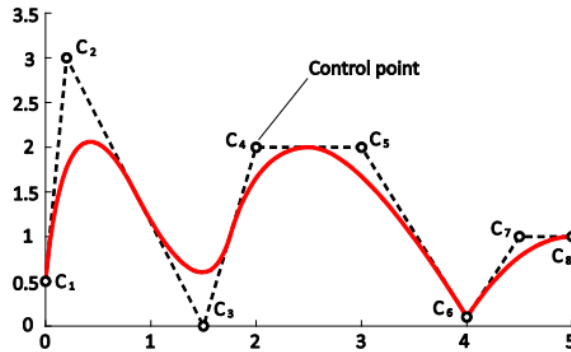
Tương tự như đường S - pline, đường Nurbs bậc p được định nghĩa bởi:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) P_i$$

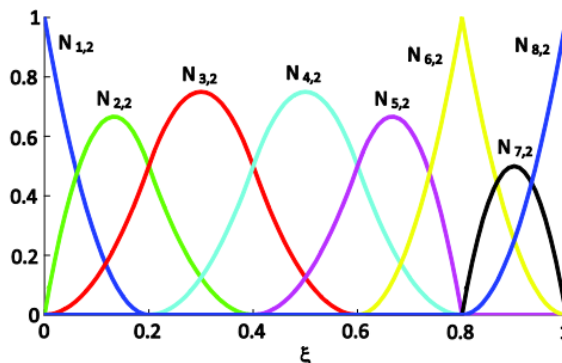
$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) \omega_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \omega_i}$$

ω_i : trọng số.

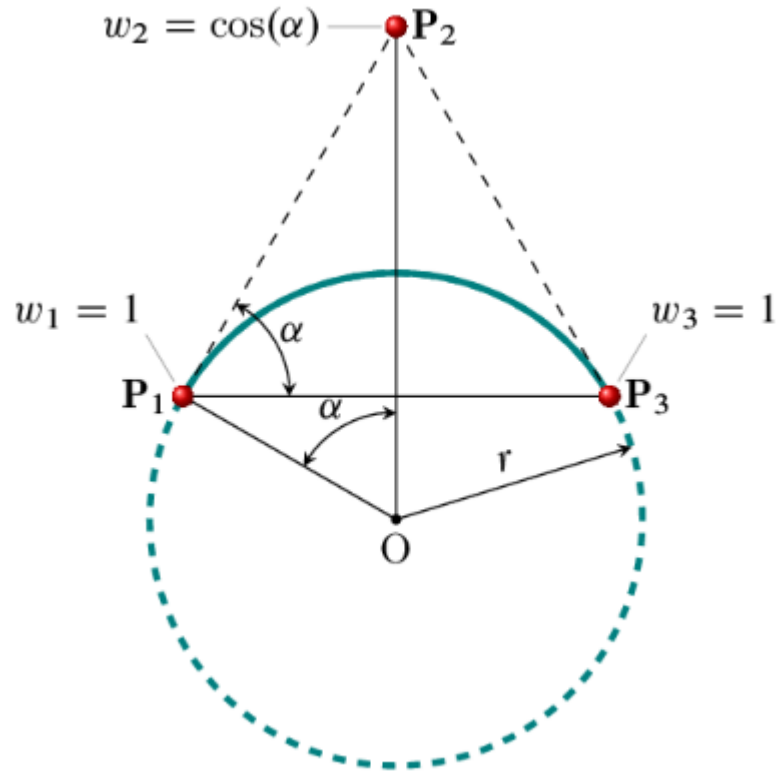
Trọng số là các đại lượng vô hướng lớn hơn không, các trọng số không nhất thiết phải bằng nhau, nếu tất cả các trọng số bằng nhau thì Nurbs trở thành B - Spline



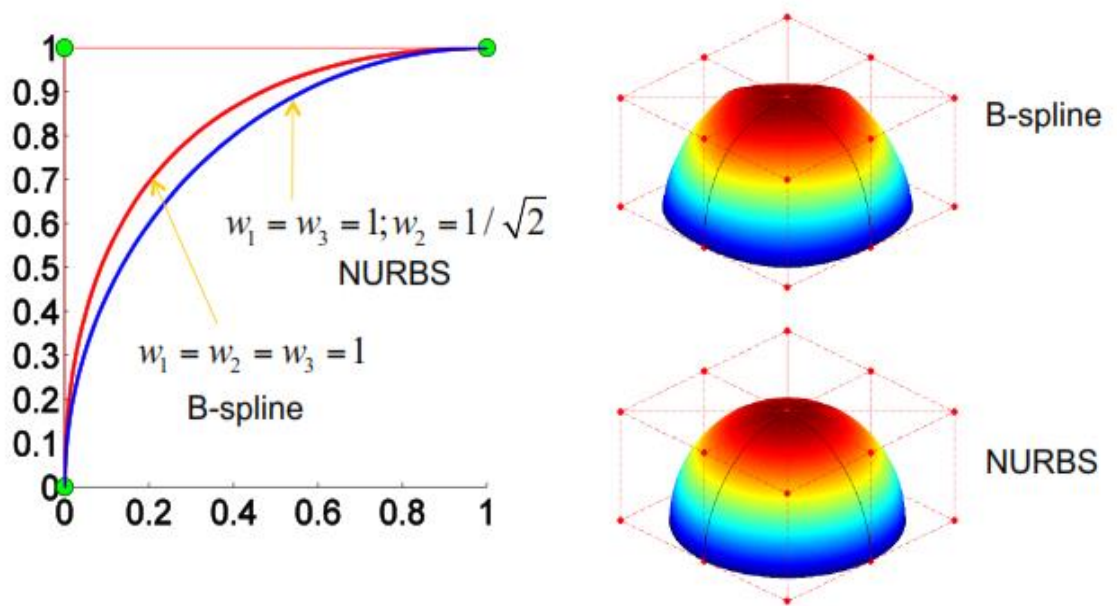
Hình 2-3. Đường cong B – Spline



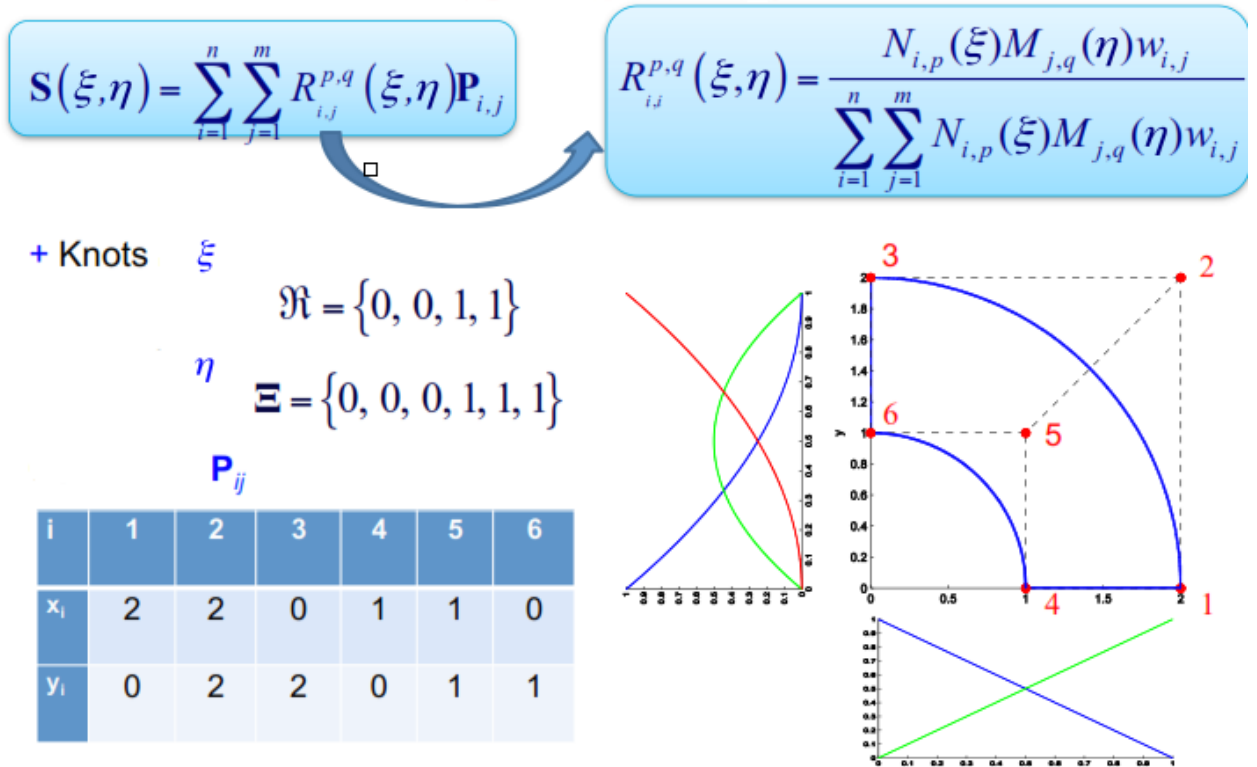
Hình 2-4. Các hàm cơ sở



Hình 2-5. Mô tả đường cong bằng hình học Nurbs



Hình 2-6. Mặt Nurbs và mặt B-Spline

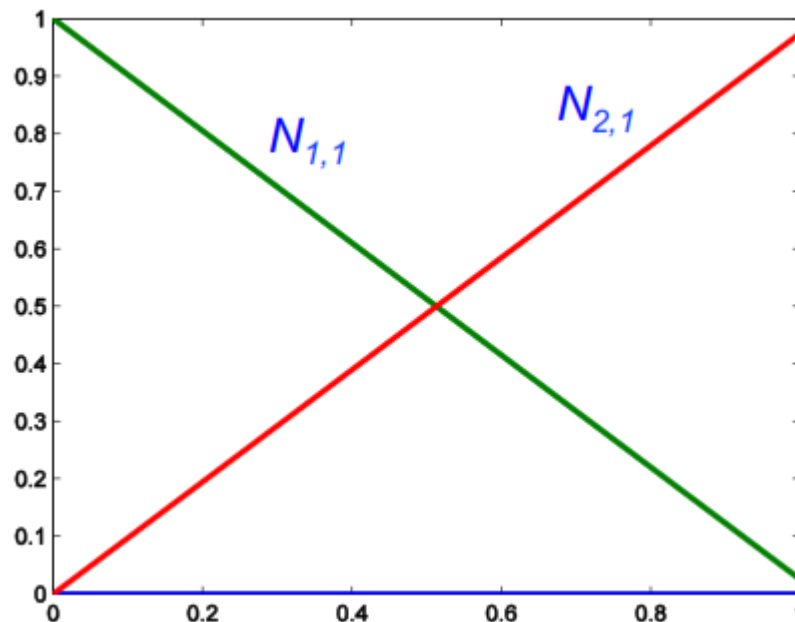


Hình 2-7. Xây dựng mặt Nurbs

2.1.1.5 Ví dụ minh họa về Vector Knot và các hàm cơ sở

Cho 1 véc tơ Knot

$$\Xi = \{0, 0, 1, 1\}$$



Hình 2-8. Minh họa hàm cơ sở ứng với vector knot $\Xi = \{0, 0, 1, 1\}$

Ta có

Chiều dài véc tơ

$$L = 4;$$

Bậc của hàm cơ sở B - Spline:

$$p = 2 - 1 = 1;$$

Số lượng hàm cơ sở:

$$n = l - p - 1 = 2;$$

Số lượng điểm điều khiển

$$n_{cp} = 2;$$

Số lượng phần tử

$$n_e = n_{cp} - p = 2 - 1 = 1;$$

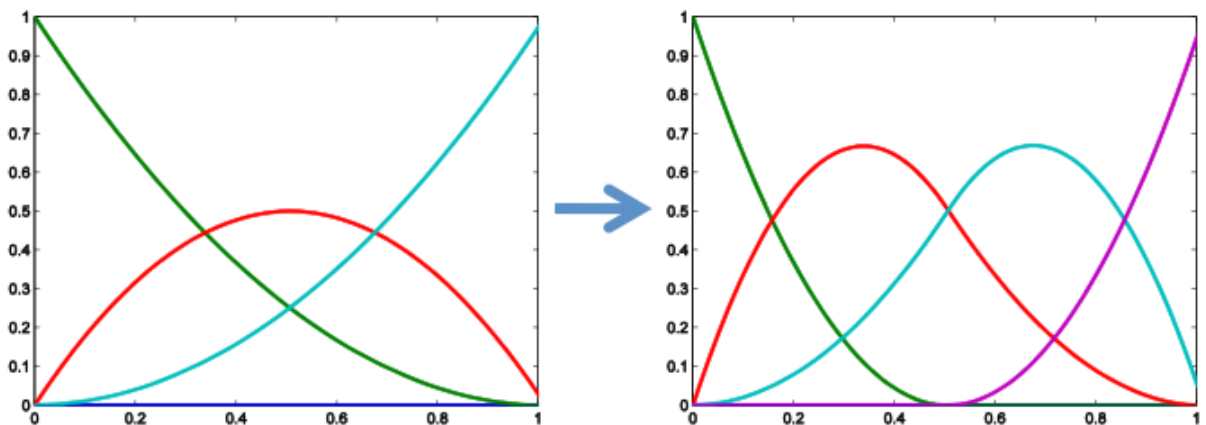
2.1.2 Làm mịn lưới

Để tăng độ chính xác của IGA, ta sử dụng 3 phương pháp làm mịn lưới

2.1.2.1 Phương pháp làm mịn h

Phương pháp làm mịn h phương pháp tăng độ mịn của lưới bằng cách tăng thêm số nút (knot) và véc tơ nút (Knot vector) mà không thay đổi bậc của hàm cơ sở.

Khi thực hiện theo phương pháp làm mịn h vector knot được biến đổi tương ứng. Ví dụ chèn thêm 1 nút vào $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ ta được vectơ knot mới $\Xi = \{0, 0, 0, 0.51, 1, 1\}$, khi đó các hàm cơ sở cũng thay đổi tương ứng

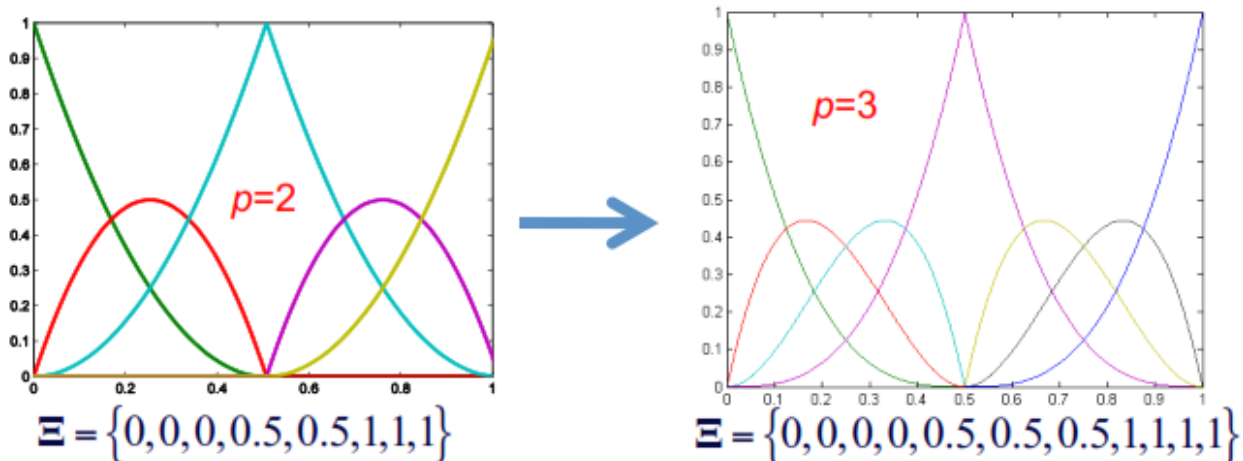


Hình 2-9. Hàm cơ sở được làm mịn sau khi chèn thêm nút

2.1.2.2 Phương pháp làm mịn p

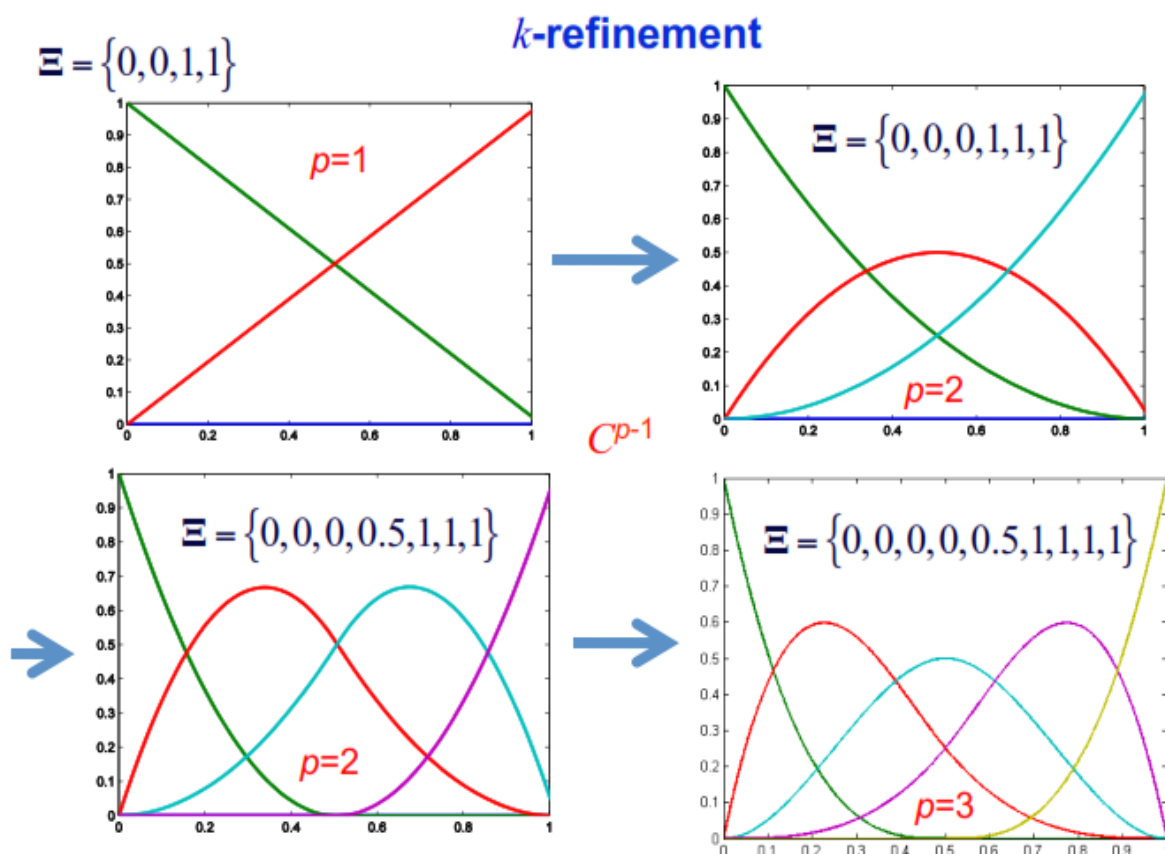
Phương pháp làm mịn p tăng độ mịn của lưới bằng cách tăng thêm số bậc của hàm cơ sở trong khi giữ nguyên số lượng phần tử

Khi thực hiện theo phương pháp làm mịn p vector knot cũng được biến đổi tương ứng. Ví dụ minh họa như hình dưới đây



2.1.2.3 Phương pháp làm mịn k

Khác với phương pháp làm mịn h và và p, phương pháp làm mịn k là phương pháp mới so với phương pháp phân tử hữu hạn. Phương pháp làm mịn k tăng độ mịn của lưới bằng cách vừa tăng bậc của hàm cơ sở vừa chèn thêm nút để đảm bảo tính liên tục của hàm cơ sở không giảm.



Hình 2-10. Phương pháp làm mịn k

2.2 Giải bài toán kết cấu theo phương pháp đẳng hình học

2.2.1 Các bước giải bài toán theo phương pháp đẳng hình học

Trình tự giải bài toán kết cấu theo phương pháp đẳng hình học cũng gần tương tự như phương pháp phân tử hữu hạn, do hàm dạng khác nhau nên ma trận độ cứng và vector lực cũng khác nhau. Phân tích đẳng hình học bao gồm các bước chính sau đây[5].

- Bước 1: Lấy dữ liệu từ CAD hoặc trực tiếp xây dựng ô hình B – Spline, Nurbs cho bài toán. Các dữ liệu cần thiết và được lưu trữ lại là tọa độ các điểm điều khiển, các trọng số, vector knot.
- Bước 2: Xây dựng ma trận chỉ số kết nối: định nghĩa một ma trận chứa chỉ số bậc tự do của từng phần tử dùng để truy xuất dữ liệu của các điểm điều khiển khi tính ma trận cục bộ và các chỉ số đồng thời dùng để lắp ráp ma trận cục bộ vào ma trận tổng thể.
- Bước 3: Xây dựng hàm dạng: xây dựng hàm dạng và xây dựng ma trận chứa tọa độ và trọng số của các điểm Gauss dùng trong phân tích số.
- Bước 4: Thành lập ma trận phần tử và vector lực phần tử.
- Bước 5: Lắp ráp các ma trận phần tử và vector lực phần tử: lắp qua các ma trận và vector lực phần tử và sử dụng ma trận chỉ số kết nối để cộng các phần cục bộ vào ma trận và vector tổng.
- Bước 6: Áp dụng các điều kiện biên và các điều kiện ban đầu.
- Bước 7: Giải hệ phương trình tuyến tính.
- Bước 8: Phân tích và biểu diễn kết quả.

Các bước tính toán chi tiết sẽ được minh trình bày cụ thể trong phần áp dụng ở chương sau.

2.3 Phân tích đẳng hình học giải bài toán phẳng của lý thuyết đàn hồi tuyến tính

Lý thuyết đàn hồi được dùng để giải quyết các bài toán vật rắn biến dạng mà vật liệu vẫn làm việc trong miền đàn hồi và quan hệ ứng suất biến dạng tuân theo định luật Hooke. Bài toán lý thuyết đàn hồi thường được áp dụng cho vật liệu kim loại, bê tông... Trong nội dung đề tài sẽ khảo sát phân tích đẳng hình học cho bài toán phẳng của lý thuyết đàn hồi tuyến tính. Bài toán phẳng đã có nghiệm giải tích sẽ được sử dụng để làm cơ sở đánh giá độ chính xác của phương pháp phân tích đẳng hình học.

2.3.1 Cơ sở lý thuyết bài toán phẳng của lý thuyết đàn hồi

2.3.1.1 Quan hệ giữa chuyển vị và biến dạng

Bài toán phẳng của lý thuyết đàn hồi chỉ tồn tại các chuyển vị trong mặt phẳng XOY là u và v , chuyển vị này được thể hiện dưới dạng ma trận như sau

$$u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

Các biến dạng bao gồm 2 thành phần biến dạng dài và 1 thành phần biến dạng góc trong mặt phẳng XOY ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy} . Dạng ma trận như sau

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

Biểu diễn dưới dạng ma trận

$$\varepsilon = \nabla_s u$$

$$\nabla_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

2.3.1.2 Các phương trình cân bằng

- Phương trình vi phân cân bằng:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + g_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + g_y = 0$$

g_x, g_y : thành phần cường độ lực thể tích theo phương X và Y;

Viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Hay

$$[\nabla] \{\sigma\} + \{g\} = 0$$

- Điều kiện bề mặt:

$$l \cdot \sigma_{xx} + m \cdot \sigma_{xy} = q_x$$

$$l \cdot \sigma_{yx} + m \cdot \sigma_{yy} = q_y$$

l, m là các cô sin chỉ phương của pháp tuyến ngoài mặt phẳng đang xét được tính bằng cô sin của góc hợp bởi vector pháp tuyến và trục X, Y

q_x, q_y : là thành phần ngoại lực lần lượt theo các trục X và Y trên một đơn vị diện tích mặt ngoài của vật thể đàn hồi

Viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix}$$

Hay

$$[L]\{\sigma\} = \{q\}$$

2.3.1.3 Các phương trình liên tục

Các phương trình liên tục của biến dạng như sau:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

2.3.1.4 Mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng

Quan hệ ứng suất biến dạng được thể hiện thông qua hệ phương trình sau:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{xx} - \mu \cdot \sigma_{yy}] + \alpha \cdot T$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{yy} - \mu \cdot \sigma_{xx}] + \alpha \cdot T$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \cdot \sigma_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \sigma_{xy}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot [\varepsilon_{xx} + \mu \cdot \varepsilon_{yy}] - \frac{E}{1-\mu} \cdot \alpha T$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot [\varepsilon_{yy} + \mu \cdot \varepsilon_{xx}] - \frac{E}{1-\mu} \cdot \alpha T$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \varepsilon_{xy} = G \cdot \varepsilon_{xy}$$

α : hệ số giãn nở vì nhiệt;

T: nhiệt độ biến thiên;

E: mô đun đàn hồi;

G: mô đun đàn hồi về trượt;

μ : hệ số nở hông;

Trình bày ở dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} + \alpha \cdot T \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 2 & 2\mu & 0 \\ 2\mu & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E}{1-\mu} \alpha T \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Nếu bỏ qua yếu tố ảnh hưởng do nhiệt độ, gọi D là ma trận đàn hồi của vật liệu trong bài toán phẳng ta có

$$[D] = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 2 & 2\mu & 0 \\ 2\mu & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{bmatrix}$$

$$[D]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix}$$

Khi đó có thể biểu diễn

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}$$

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \cdot \{\sigma\}$$

- Bài toán trạng thái ứng suất phẳng: $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$, khi đó

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{E} \cdot \mu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha T$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\mu}{1-\mu} \cdot (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha T$$

Tuy nhiên nếu chiều dày mỏng ta có thể lấy $\varepsilon_{zz} = 0$ mà vẫn đảm bảo chính xác so với nhu cầu thực tế

- Bài toán biến dạng phẳng:

$$u_z = 0;$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot [\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}] - \frac{E}{1-2\mu} \alpha T$$

$$\sigma_{zz} = \mu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - E \alpha T$$

Tương tự như bài toán trạng thái ứng suất phẳng, trong thực tế ta có thể bỏ qua ứng suất σ_{zz} mà vẫn đảm bảo sai số cho phép.

2.3.2 Dạng mạnh và dạng yếu của bài toán phân tích đẳng hình học[5]

- Dạng mạnh của bài toán phẳng được phát biểu như sau:

Cho g và các điều kiện biên “Dirichlet” hay còn gọi là điều kiện biên chính hoặc điều kiện biên hình học: $u = \bar{u}$ trên biên và điều kiện biên “Neumann” hay còn gọi là điều kiện biên tự nhiên hoặc điều kiện biên lực trên biên $q = \bar{q}$ yêu cầu tìm u sao cho

$$[\nabla]\{\sigma\} + \{g\} = 0$$

$$\sigma = D\nabla_s u$$

- Dạng yếu được viết như sau:

Cho g và các điều kiện biên “Dirichlet” hay còn gọi là điều kiện biên chính hoặc điều kiện biên hình học: $u = \bar{u}$ trên biên và điều kiện biên “Neumann” hay còn gọi là điều kiện biên tự nhiên hoặc điều kiện biên lực trên biên $q = \bar{q}$ yêu cầu tìm u sao cho với mọi hàm thử (hàm trọng số) δu :

$$\int_{\Omega} (\nabla_s \delta u)^T D \nabla_s u d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{q} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u^T g d\Omega$$

2.3.3 Phương trình ma trận, Ma trận độ cứng và vector lực cục bộ

Phương trình ma trận trong phương pháp phân tích đẳng hình học và phương pháp phần tử hữu hạn cũng có dạng như nhau;

$$Kd = F$$

K: ma trận độ cứng,

d: vector chuyển vị;

F: vector lực

Ma trận độ cứng và vector lực cục bộ như sau:

$$k^e = [k_{ab}^e] = \int_{\Omega_e} (B_a(x))^T D B_b(x) d\Omega$$

$$f^e = [f_a^e] = \int_{\Omega_e} N_a(x) g d\Omega + \int_{\Gamma_t} N_a(x) \bar{q} d\Gamma$$

Trong đó

$$B_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{\partial N_a}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Đưa vào lập trình

$$k^e = \int_{\Omega_e} B^T D B d\Omega$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{nen}}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & & & \dots & \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{nen}}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{nen}}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$f^e = \int_{\Omega_e} N^T g d\Omega + \int_{\Gamma_f^e} N^T g d\Gamma$$

Trong đó N là ma trận hàm dạng được định nghĩa cho bài toán hai chiều như sau:

$$\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_{nen} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & \dots & N_{nen} \end{bmatrix}$$

n_{en} : số lượng hàm dạng của mỗi phần tử (bằng với số lượng điểm điều khiển chi phối phần tử đó)

Như vậy ma trận độ cứng và vector lực tổng thể được viết như sau:

$$K = \sum_{e=1}^{n_{el}} K^e$$

$$K_e = [K_{AB}^e]$$

$$F = \sum_{e=1}^{n_{el}} F^e$$

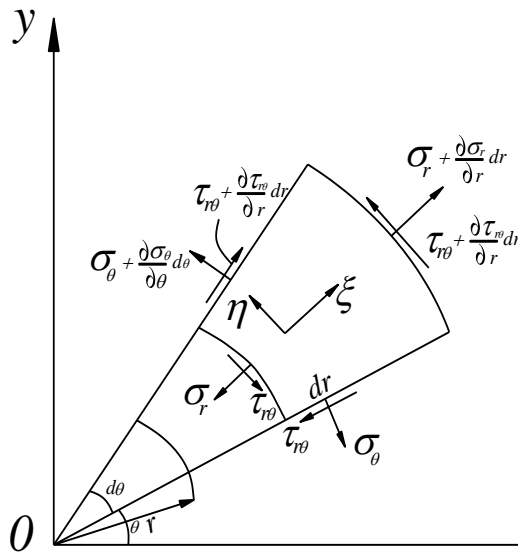
$$F^e = \{F_A^e\}$$

Áp dụng phân tích đẳng hình học vào bài toán phẳng đối xứng trục

3.1 Cơ sở lý thuyết bài toán phẳng trong hệ tọa độ cực[1]

Khi giải bài toán lý thuyết đàn hồi, đối với các bài toán nghiên cứu trạng thái ứng suất biến dạng trong các đĩa, trong các ống dày, thanh cong, con lăn dài, tại những miền cạnh lỗ dài của tấm... hệ tọa độ cực được sử dụng thay thế cho hệ tọa độ Descartes.

Trong tọa độ cực, vị trí một điểm được xác định bởi góc cực θ và véc tơ bán kính r .



Hình 3-1. Phân tử vô cùng bé chịu ứng suất trên biên

3.1.1 Các phương trình cơ bản

- Các phương trình vi phân cân bằng:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

- Các phương trình hình học

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

- Định luật Hooke

Trong trường hợp bài toán phẳng

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta$$

Và định luật Hooke có dạng

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{r\theta} = \frac{1}{G}\tau_{r\theta}$$

- Giải bài toán phẳng trong hệ tọa độ cực theo ứng suất, Hàm ứng suất:

Khi bỏ qua lực thể tích các thành phần ứng suất được biểu thị bằng hàm ứng suất $\varphi(r, \theta)$ như sau:

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)$$

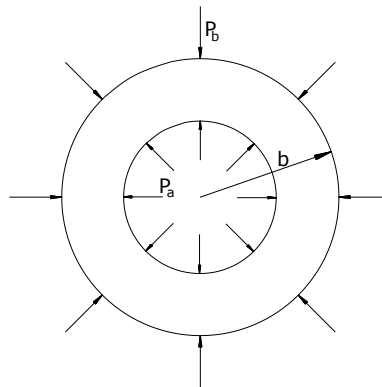
$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}$$

Khi đó phương trình liên tục cũng được biểu diễn thông qua hàm ứng suất và cũng là một hàm điều hòa kép trong hệ tọa độ cực

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

3.1.2 Bài toán ống dày chịu áp lực phân bố đều (bài toán La mê)

Xét ứng suất trong ống dày có đường kính ngoài b và đường kính trong a có mặt trong và mặt ngoài chịu áp lực phân bố đều là P_a và P_b như trong hình vẽ



Hình 3-2. Ống dày chịu áp lực

Giá trị ứng suất trong ống được tính toán theo giải tích như sau:

$$\sigma_r = \frac{P_a a^2 - P_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{b^2 a^2 (P_a - P_b)}{r^2 (b^2 - a^2)}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_a a^2 - P_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{b^2 a^2 (P_a - P_b)}{r^2 (b^2 - a^2)}$$

3.2 Ứng dụng IGA giải bài toán ống dày chịu lực

Ứng dụng tính toán cho đường ống dẫn chất lỏng thành dày chịu áp lực bên trong về bên ngoài thành ống cụ thể trong trường hợp đồng ống của Dự án khí điện đạm Cà mau như sau:

Bán kính trong $a = 21,11\text{cm}$;

Bán kính ngoài $b = 22,86\text{cm}$;

Áp lực bên ngoài thành ống $P_b = 50\text{T/m}^2 = 500\text{ kN/m}^2 = 0.5\text{ kN/cm}^2$;

Áp lực trong thành ống $P_a = 14,76\text{ MPa} = 1,476\text{ kN/cm}^2$

Mô đun đàn hồi $E = 20700\text{ kN/cm}^2$, hệ số nở hông là 0,3

Đường ống có chiều dài rất lớn so với kích thước của tiết diện nên có thể tính toán theo lý thuyết bài toán biến dạng phẳng của Lý thuyết đàn hồi.

Việc tính toán được tiến hành bằng Matlab, trong đề tài có tham khảo các module được xây dựng sẵn trong gói “SimoPackage” của PGS.TS Nguyễn Xuân Hùng.

Do kết cấu có tính đối xứng trục nên ta chỉ cần tính cho $\frac{1}{4}$ hình, các ứng suất được tính tại vị trí tương ứng với bán kính trung bình là $r = 21.985\text{ cm}$.

Quá trình tính toán và kết quả được thể hiện dưới đây, tất cả các kết quả tính toán đều được so sánh với kết quả theo lý thuyết đàn hồi

3.2.1 Trường hợp 1: lưới thô

Vector knot theo phương η

$$\mathbf{H} = \{0, 0, 1, 1\}$$

Số phần tử $n_e = 1$

Bậc của đường cong $p = 1$

Số lượng control point $n_{cp} = 1 + 1 = 2$

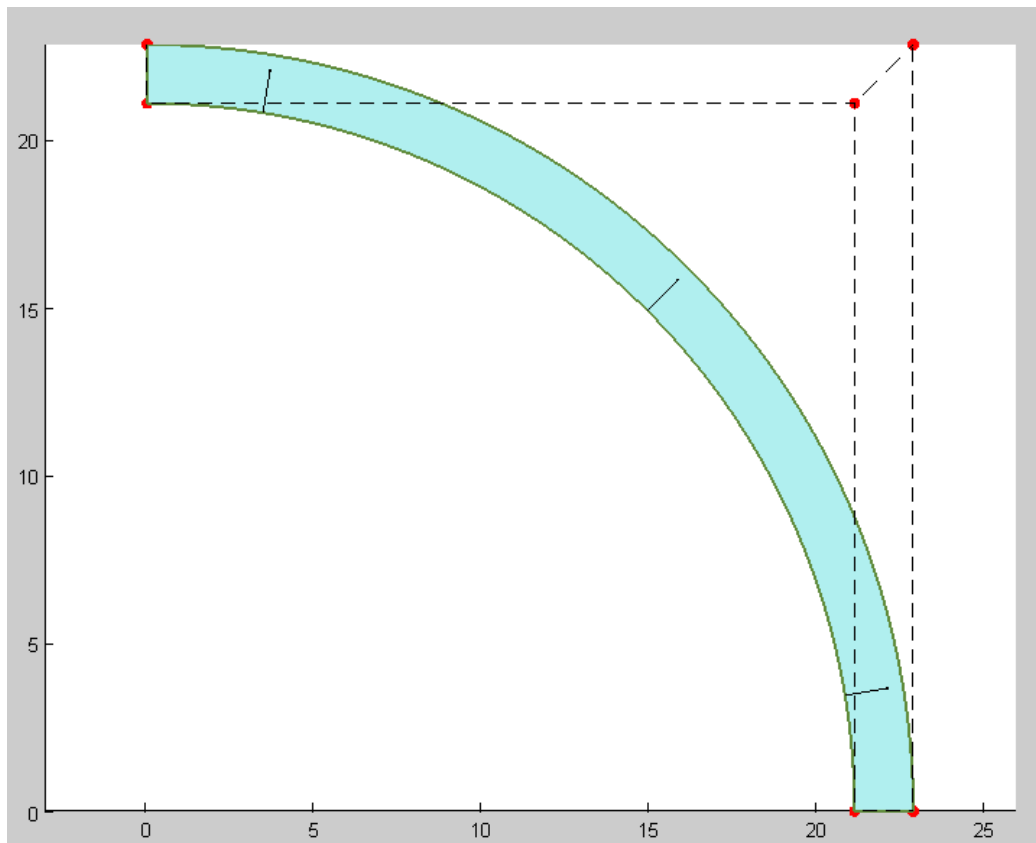
Vector knot theo phương ξ

$$\mathbf{E} = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

Số phần tử $n_e = 1$

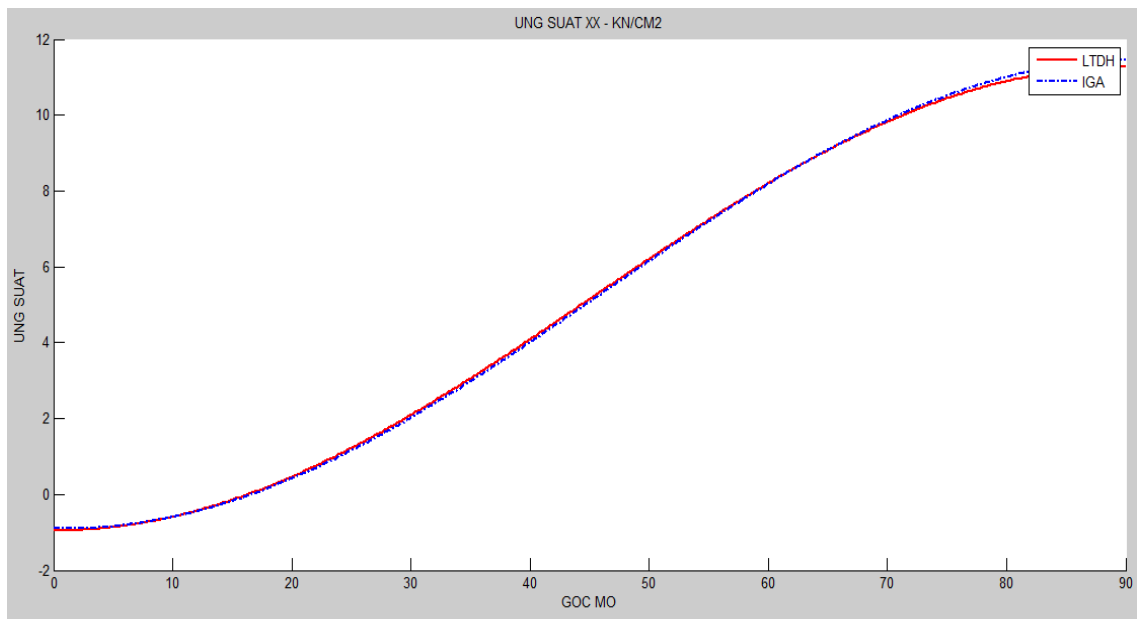
Bậc của đường cong $p = 2$

Số lượng control point $n_{cp} = 2 + 1 = 3$

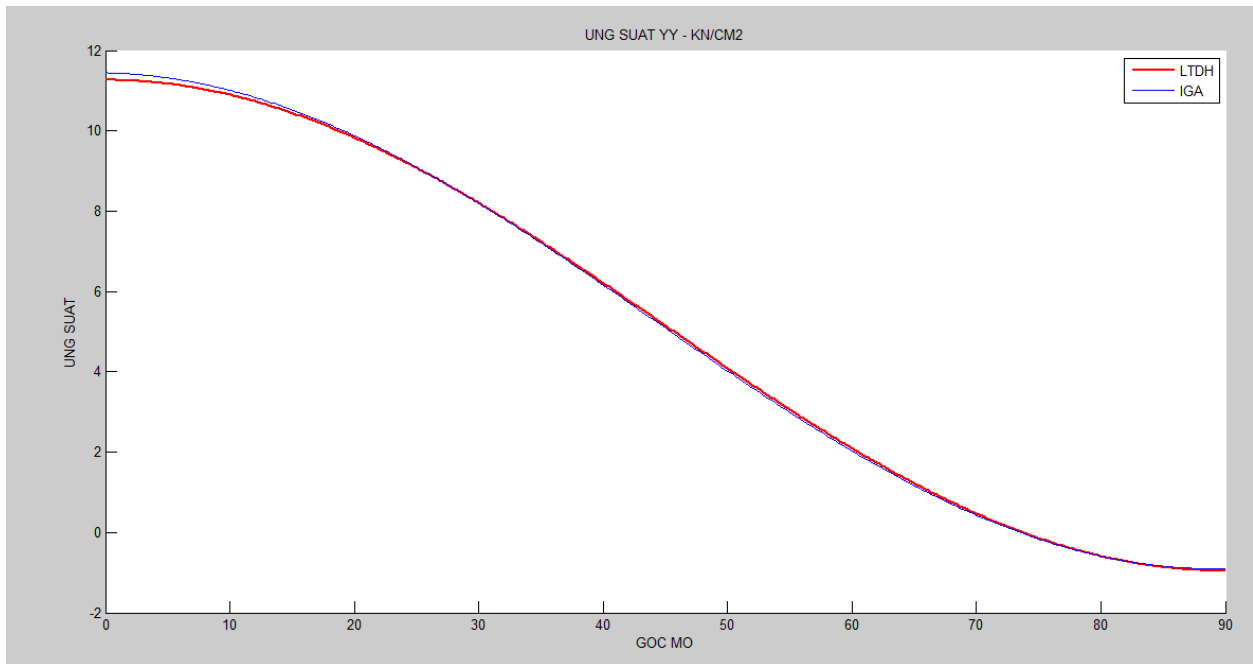


Hình 3-3. Lưới thô gồm 1 phần tử cho ¼ hình

Kết quả tính toán cho ở hình sau



Hình 3-4. Kết quả tính toán ứng suất σ_{xx}



Hình 3-5. Giá trị ứng suất σ_{yy}

3.2.2 Trường hợp 2: lưới được làm mịn với số lượng phần tử 2x2

Vector knot theo phương η

$$\mathbf{H} = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$$

Số phần tử $n_e = 2$

Bậc của đường cong $p = 2$

Số lượng control point $n_{cp} = 4$

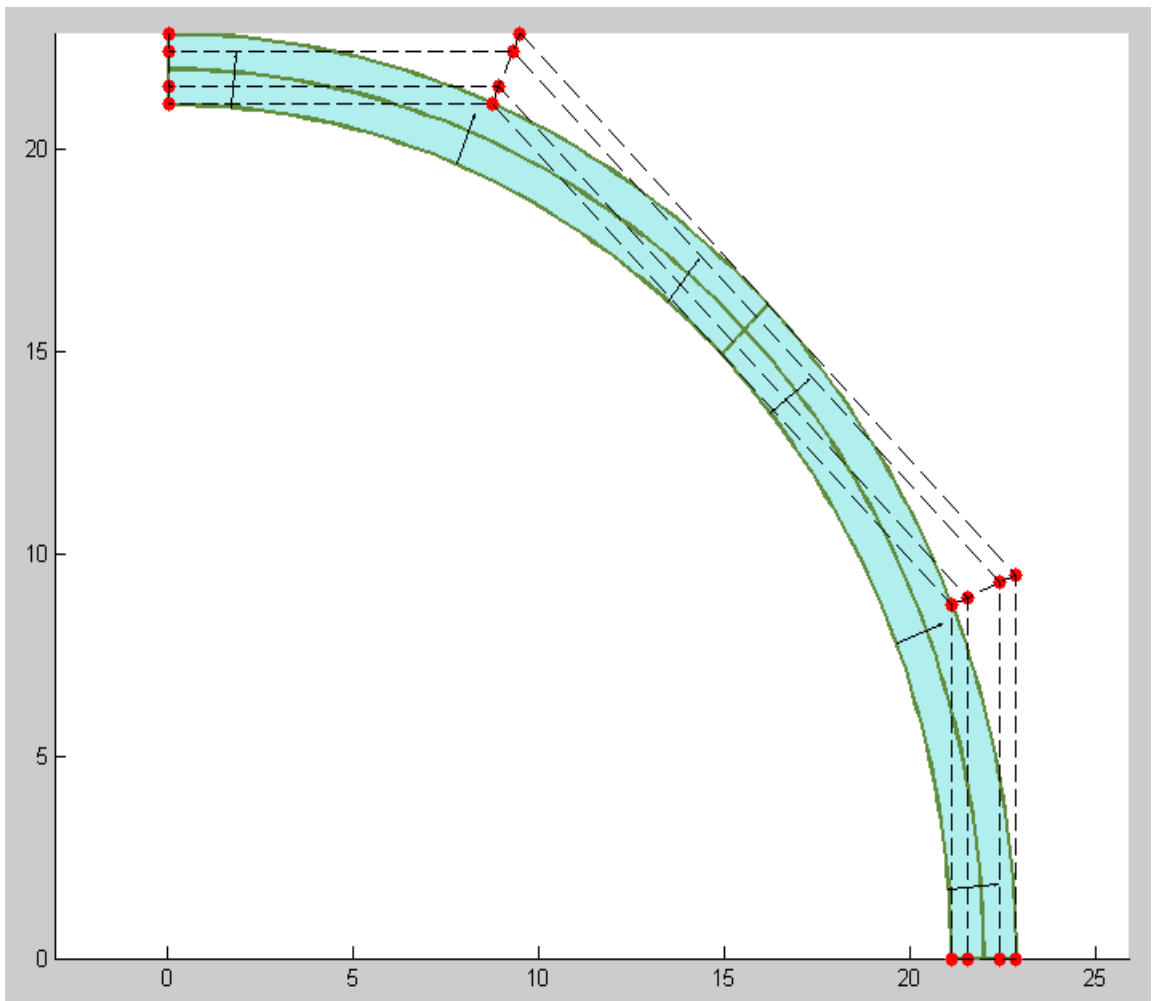
Vector knot theo phương ξ

$$\mathbf{\Xi} = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$$

Số phần tử $n_e = 2$

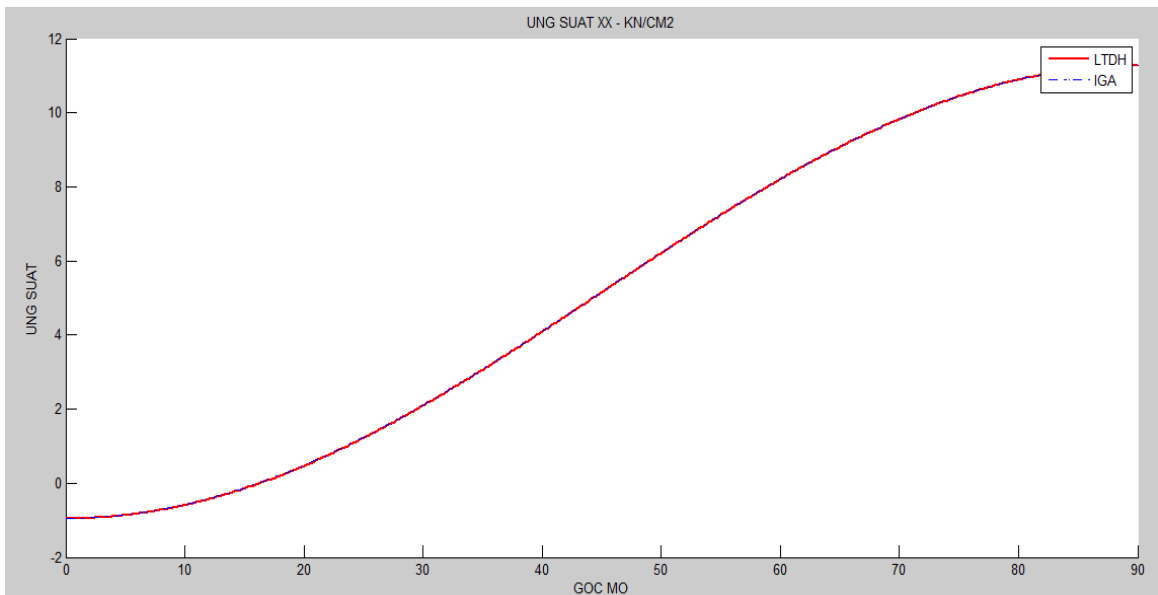
Bậc của đường cong $p = 2$

Số lượng control point $n_{cp} = 4$

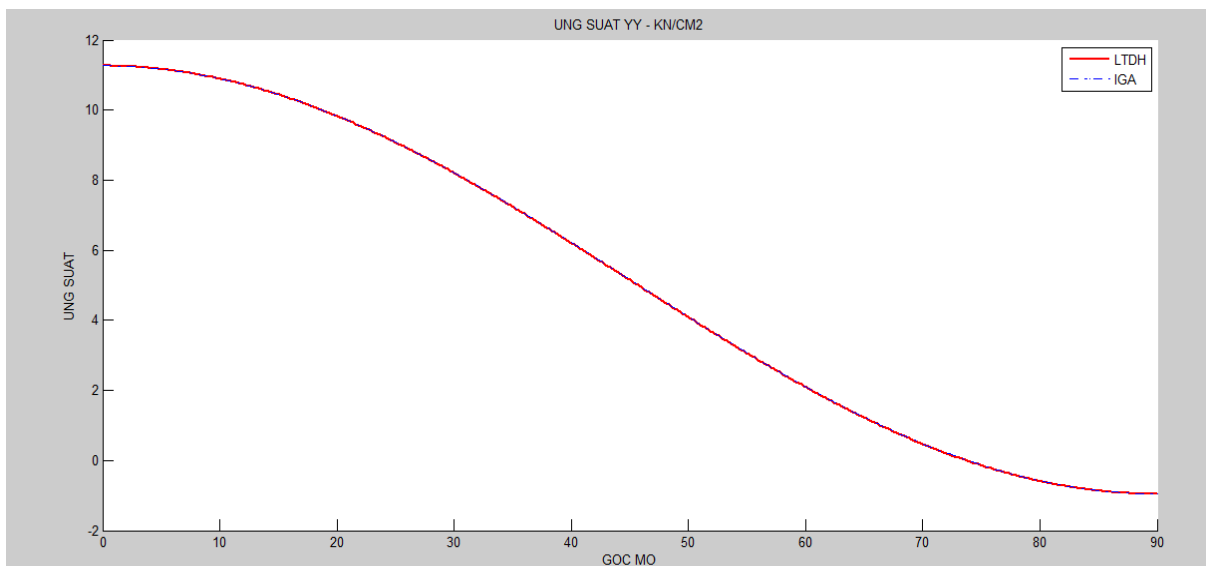


Hình 3-6. Lưới đã được làm mịn, số lượng phần tử là 2

Kết quả tính toán cho ở hình sau



Hình 3-7. Kết quả tính toán ứng suất σ_{xx}



Hình 3-8. Giá trị ứng suất σ_{yy}

Như vậy IGA cho lời giải khá sát với lý thuyết, chỉ cần tăng số lượng phần tử lên là 2 đã cho kết quả gần như chính xác tuyệt đối

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1.Kết luận

Đề tài đã trình bày tổng quan về IGA và áp dụng tự động hóa vào tính toán cho một kết cấu thực tế. Qua đó cho thấy khả năng ứng dụng rất cao của IGA trong việc tính toán kết cấu nói riêng và các bài toán khác được tính theo các phương pháp số.

Ưu điểm: gọn nhẹ nên quá trình tính toán nhanh, có thể tận dụng được mô hình đã được dựng sẵn từ CAD; kết quả tính toán cho sai số rất nhỏ. Đặc biệt đối với các bài toán có các biên là đường hoặc mặt cong thì số lượng phần tử tính toán so với phương pháp phần tử hữu hạn là ít hơn nhiều

Nhược điểm: có ít phần mềm thương mại hỗ trợ nên vẫn cần lập trình bằng tay; lý thuyết tính mới đòi hỏi thời gian nghiên cứu và tiếp cận lâu hơn các phương pháp cũ khó có thể áp dụng ngay vào công tác lao động sản xuất...

2.Kiến nghị

Với những ưu điểm và khả năng áp dụng của IGA thì với yêu cầu thực tế về việc nghiên cứu khoa học và giảng dạy, vấn đề đặt ra cần được mở rộng cho hợp trong các trường hợp, lĩnh vực phức tạp và cần được nghiên cứu sâu hơn để có thể đáp ứng được các như cầu trong công tác nghiên cứu khoa học và giảng dạy.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Ngọc (2012), *Bài giảng đại học Cơ học trong môi trường liên tục*,
2. Lê Trọng Vinh, Trần Minh Toàn (2013), *Giáo trình Phương pháp tính và Matlab*, Nhà xuất bản Bách Khoa - Hà Nội.
3. Đỗ Văn Hiến, Châu Nguyên Khánh, and Nguyễn Xuân Hùng, "Isogeometric analysis of plane-curved beams," trình bày tại Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc, Đà Nẵng, 2015.
4. Nguyễn Xuân Hùng (2014), *Isogeometric analysis, from theory to application*, VGU.
5. Nguyễn Xuân Hùng (2015), *Phân tích đẳng hình học cầu nối hợp nhất giữa mô hình mô phỏng và thiết kế*, NXB Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh.

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU	1
1. Tính cấp thiết của đề tài	1
2. Mục đích	1
3. Nội dung và phương pháp nghiên cứu	1
4. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn	1
Chương 1	2
Tổng quan về đề tài	2
1.1 Tổng quan về các phương pháp số	2
1.2 Tình hình ứng dụng phương pháp số trong tính toán kết cấu công trình	2
Chương 2	4
Phương pháp phân tích đẳng hình học	4
2.1 Tổng quan về hàm cơ sở B - Spiline.....	4
2.1.1 Hàm cơ sở B – Spline và hàm Nurbs 26 85.....	5
2.1.2 Làm mịn lưới	9
2.2 Giải bài toán kết cấu theo phương pháp đẳng hình học.....	10
2.2.1 Các bước giải bài toán theo phương pháp đẳng hình học.....	10
2.3 Phân tích đẳng hình học giải bài toán phẳng của lý thuyết đàn hồi tuyến tính	11
2.3.1 Cơ sở lý thuyết bài toán phẳng của lý thuyết đàn hồi.....	11
2.3.2 Dạng mạnh và dạng yếu của bài toán phân tích đẳng hình học.....	14
2.3.3 Phương trình ma trận, Ma trận độ cứng và vector lực cục bộ	15
Chương 3	17
Áp dụng phân tích đẳng hình học vào bài toán phẳng đối xứng trục	17
3.1 Cơ sở lý thuyết bài toán phẳng trong hệ tọa độ cực[1].....	17
3.1.1 Các phương trình cơ bản.....	17
3.1.2 Bài toán ống dày chịu áp lực phân bố đều (bài toán La mê)	18
3.2 Ứng dụng IGA giải bài toán ống dày chịu lực.....	19
3.2.1 Trường hợp 1: lưới thô.....	19
3.2.2 Trường hợp 2: lưới được làm mịn với số lượng phần tử 2x2	21
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	24
1.Kết luận	24
2.Kiến nghị.....	24
TÀI LIỆU THAM KHẢO	25