và hàm $g(x,y)=\dfrac{x+2y}{3}$.

Đặt $r(n)=\dfrac{3y_{n+1}-y_n}{2}$ ta có

$\lim\limits_{n\to\infty} r(n)=M=\dfrac{\ln\alpha}{2}$

và dãy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ là nghiệm của phương trình sai phân $f(y_{n+1},y_n)=r(n)$ (*). Tương tự như trong ví dụ 1 dễ kiểm chứng rằng các hàm f,g thỏa mãn tất cả các điều kiện của định lý 2.1. Vậy theo kết luận của định lý, nghiệm $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ của phương trình (*) thỏa mãn

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\dfrac{\ln\alpha}{2}\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{\alpha}$.

Khẳng định của bài toán trên vẫn đúng nếu giả thiết $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}^3}{x_n}=\alpha\in[0,+\infty)$ được thay bằng giả thiết $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+k}^3}{x_n}=\alpha\in[0,+\infty)$ với k là số nguyên dương cố định tùy ý.

Từ định lý 2.1 có thể suy ra hệ quả sau:

Hệ quả 2.2: *Nếu k là số thực khác 0 thì không tồn tại hàm hai biến liên tục g xác định trên toàn $\mathbf{R}^2$ có các tính chất sau:*

i. $g(x,y)\le g(x',y')$ *khi* $x\le x'$ *và* $y\le y'$;

ii. $g(y,x+ky)=x$ *với mọi* $x,y\in(-\infty,+\infty)$;

iii. $x\le g(x,A)\Leftrightarrow x\le A$ *và* $x\ge g(x,A)\Leftrightarrow x\ge A$ *với* $x,A\in(-\infty,+\infty)$.

Chứng minh.

Phương trình $x_{n+1}+kx_n=\dfrac{n+1}{n}$ (**) rõ ràng có nghiệm là một dãy nào đó $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bằng công thức truy toán $x_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}-kx_n$.

Nếu tồn tại hàm hai biến liên tục g xác định trên toàn $\mathbf{R}^2$ có các tính chất nêu trong hệ quả 2.2 thì với $f(x,y)=x+ky, r(n)=\dfrac{n+1}{n}$ tất cả các điều kiện của định lý 2.1 được thỏa mãn. Do đó dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$.

Cho n dần tới vô cực trong đẳng thức (**) ta đi đến mâu thuẫn $1+k=1$, vì k khác 0.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Teodora-Liliana T. Rădulescu, Vicenţiu D. Rădulescu, Titu Andreescu. Problems in real analysis: Advanced calculus on real axis. Springer 2009.

[2]. Б.М.Макаров, М.Г.Голузина, А.А.Лодкин, А.Н.Подкорытов. Избранные задачи по вещественному анализу. Москва “Наука”, 1992.

Ngày nhận bài: 03/3/2016

Ngày phản biện: 11/3/2016

Ngày duyệt đăng: 14/3/2016

PHƯƠNG PHÁP TÍNH TỔNG CỦA MỘT LỚP CHUỖI SỐ CÓ SỐ HẠNG TỔNG QUÁT u_n LÀ HÀM HỮU TỈ CỦA n

A METHOD TO SUM SERIES WITH GENERAL TERMS u_n BEING A RATIONAL FUNCTION OF n

PHẠM VĂN MINH

Bộ môn Toán, Trường đại học Hàng Hải Việt Nam

Tóm tắt

Bài báo này đưa ra cách tính tổng của lớp chuỗi số dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

trong đó $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, $q_n = \prod_{i=1}^{m}(n-\alpha_i), m \geq 2, \alpha_i \in Q \setminus N^* \ \forall i = \overline{1,m}$,

$\alpha_i \neq \alpha_j, \forall i, j = \overline{1,m}, i \neq j$, p_n *là đa thức bậc không quá* $m-2$ *của* n.

Abstract

This article provides a method to sum series of the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

where $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, $q_n = \prod_{i=1}^{m}(n-\alpha_i), m \geq 2, \alpha_i \in Q \setminus N^* \ \forall i = \overline{1,m}$,

$\alpha_i \neq \alpha_j, \forall i, j = \overline{1,m}, i \neq j$, p_n *is a polynomial of degree less than or equal to* $m-2$ *of* n.

Xét chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1}$$

trong đó $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, $q_n = \prod_{i=1}^{m}(n-\alpha_i), m \geq 2, \alpha_i \in Q \setminus N^* \ \forall i = \overline{1,m}$, $\alpha_i \neq \alpha_j, \forall i, j = \overline{1,m}, i \neq j$, p_n là đa thức bậc không quá $m-2$ của n.

Từ giả thiết về q_n và bậc của p_n suy ra hoặc $u_n \equiv 0$, hoặc $u_n \sim \dfrac{a}{n^k}$ với $a \neq 0$ và $k \geq 2$ nào đó khi $n \to \infty$ Ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^k}$ hội tụ [1, 2]. Suy ra chuỗi (1) hội tụ [1]. Bài báo này chỉ ra phương pháp tính tổng của chuỗi (1).

Vì u_n là phân thức thực sự của n nên tồn tại duy nhất biểu diễn

$$u_n = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{n-\alpha_i}. \tag{2}$$

Từ (2) suy ra

$$\frac{np_n}{q_n} = nu_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{n}{n-\alpha_i}.$$

Cho n dần đến vô cực, vì np_n là đa thức bậc không quá $m-1$, q_n là đa thức bậc m của n nên $\dfrac{np_n}{q_n} \to 0$. Mặt khác, $\dfrac{n}{n-\alpha_i} \to 1$ khi $n \to \infty$, ta suy ra

$$\sum_{i=1}^{m} c_i = 0. \tag{3}$$

Từ (2) và (3) ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{n-\alpha_i} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{c_i}{n-\alpha_i} - \frac{c_i}{n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} c_i\left[\frac{1}{n-\alpha_i} - \frac{1}{n}\right].$$

Để ý rằng các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n-\alpha_i} - \dfrac{1}{n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha_i}{n(n-\alpha_i)}, i = \overline{1,m}$, hội tụ. Suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n-\alpha_i} - \frac{1}{n} \right]. \tag{4}$$

Với $\alpha \in Q \setminus N^*$ đặt

$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n-\alpha} - \frac{1}{n} \right]. \tag{5}$$

Từ (4) và (5) ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{i=1}^{m} c_i S(\alpha_i). \tag{6}$$

Để tính $S(\alpha)$ ta xét các trường hợp sau.

1. Trường hợp $\alpha \in [0;1)$. Nếu $\alpha = 0$ thì $S(\alpha) = 0$. Giả sử $0 < \alpha < 1$. Từ khai triển Maclaurin của hàm $ln(1+x)$ [1] thay x bởi $-x$ ta được

$$-ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \forall x : -1 < x < 1$$

$$\Rightarrow -x^{-\alpha-1} ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-\alpha-1}}{n}, \forall x : 0 < x < 1.$$

Với mọi $a, b : 0 < a \le b < 1$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ hội tụ đều trên $[a;b]$ [1] nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-\alpha-1}}{n}$ hội tụ đều trên $[a;b]$, do đó tích phân hai vế đẳng thức cuối cùng trên đoạn $[a;b]$ và sử dụng tính chất của chuỗi hội tụ đều [1] ta được

$$-\int_a^b x^{-\alpha-1} ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{n-\alpha} - a^{n-\alpha}}{n(n-\alpha)}$$

$$-\int_a^b x^{-\alpha-1} ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{n-\alpha}}{n(n-\alpha)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-\alpha}}{n(n-\alpha)}. \tag{7}$$

(Để ý rằng các chuỗi ở vế phải của (7) đều hội tụ do $0 < a^{n-\alpha} < 1, 0 < b^{n-\alpha} < 1 \forall n \ge 1$).

Trong (7) cho $a \to 0^+$. Ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-\alpha}}{n(n-\alpha)} = a^{1-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{n(n-\alpha)} \to 0$, suy ra vế phải của (7) có giới hạn, do đó vế trái của (7) cũng có giới hạn và bằng giới hạn của vế phải. Ta nhận được

$$-\int_0^b x^{-\alpha-1} ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{n-\alpha}}{n(n-\alpha)} \tag{8}$$

với mọi b thỏa mãn $0 < b < 1$. Chuỗi lũy thừa của b ở vế phải của (8) hội tụ tại $b = 1$ nên trong (8) cho $b \to 1^-$ ta được

$$-\int_0^1 x^{-\alpha-1} ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-\alpha)}. \tag{9}$$

Tích phân ở vế trái của (9) được hiểu theo nghĩa suy rộng với các điểm bất thường là 0 và 1. Từ (5) và (9) suy ra

$$S(\alpha) = -\alpha \int_0^1 x^{-\alpha-1} ln(1-x) dx. \tag{10}$$

Với $0 < x < 1$ ta có

$$-\alpha\int x^{-\alpha-1}ln(1-x)dx=\int ln(1-x)dx^{-\alpha}=x^{-\alpha}ln(1-x)-\int\frac{x^{-\alpha}dx}{x-1}$$

$$=x^{-\alpha}ln(1-x)-\int\frac{x^{-\alpha}-1}{x-1}dx-\int\frac{dx}{x-1}=x^{-\alpha}ln(1-x)-\int\frac{x^{-\alpha}-1}{x-1}dx-ln(1-x)$$

$$\Rightarrow-\alpha\int x^{-\alpha-1}ln(1-x)dx=x^{-\alpha}(1-x^{\alpha})ln(1-x)+\int\frac{x^{\alpha}-1}{x^{\alpha}(x-1)}dx.$$

Do đó từ (10) suy ra

$$S(\alpha)=\lim_{x\to1^-}\left[x^{-\alpha}(1-x^{\alpha})ln(1-x)\right]-\lim_{x\to0^+}\left[x^{-\alpha}(1-x^{\alpha})ln(1-x)\right]+\int_0^1\frac{x^{\alpha}-1}{x^{\alpha}(x-1)}dx.$$

Để chứng minh việc tính $S(\alpha)$ bằng tích phân từng phần như trên là hợp pháp và rút gọn $S(\alpha)$ ta chỉ cần chứng minh các giới hạn ở vế phải của đẳng thức cuối cùng tồn tại. Thật vậy, do $0<\alpha<1$ nên $x^{-\alpha}(1-x^{\alpha})\ln(1-x)\sim x^{-\alpha}(1-x^{\alpha})(-x)=x^{1-\alpha}(x^{\alpha}-1)\to0(x\to0^+)$. Với mọi α, sử dụng quy tắc L'Hospital ta tính được $\lim_{x\to1^-}[x^{-\alpha}(1-x^{\alpha})ln(1-x)]=0$. Đẳng thức cuối cùng được chứng minh, hơn nữa ta có

$$S(\alpha)=\int_0^1\frac{x^{\alpha}-1}{x^{\alpha}(x-1)}dx. \tag{11}$$

Tích phân ở vế phải của (11) có thể tính như sau. Ta có $\alpha\in Q,0<\alpha<1$ nên α có dạng $\alpha=p/q,p,q$ là các số nguyên, $0<p<q$. Đặt $x^{1/q}=t$ ta có

$$S(\alpha)=\int_0^1\frac{(t^p-1)qt^{q-1}dt}{t^p(t^q-1)}.$$

Suy ra

$$S(\alpha)=\int_0^1\frac{(t^p-1)qt^{q-1-p}dt}{t^q-1}. \tag{12}$$

Vế phải của (12) là tích phân của phân thức thực sự mà phương pháp tính đã được biết rộng rãi. Để ý rằng, t^q-1 có các nghiệm là $exp(ki2\pi/q),k=\overline{0,q-1}$. Vì vậy có thể dễ dàng phân tích t^q-1 thành tích của các nhị thức bậc nhất và các tam thức bậc hai không có nghiệm thực.

2. Trường hợp $\alpha\notin[0;1)$. Từ công thức (5) ta có

$$S(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n-\alpha}-\frac{1}{n-\{\alpha\}}+\frac{1}{n-\{\alpha\}}-\frac{1}{n}\right],$$

trong đó $\{\alpha\}$ là phần phân của α. Vì các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n-\alpha}-\frac{1}{n-\{\alpha\}}\right]$ và $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n-\{\alpha\}}-\frac{1}{n}\right]$ đều hội tụ nên từ biểu diễn trên của $S(\alpha)$ ta có

$$S(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n-\alpha}-\frac{1}{n-\{\alpha\}}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n-\{\alpha\}}-\frac{1}{n}\right].$$

Đối chiếu công thức trên với công thức (5) ta được

$$S(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n-\alpha}-\frac{1}{n-\{\alpha\}}\right]+S(\{\alpha\}). \tag{13}$$

Tổng của chuỗi ở vế phải của (13) có thể tính bằng phương pháp được trình bày trong [3] vì $\alpha - \{\alpha\}$ nguyên và khác không. Còn $S(\{\alpha\})$ có thể tính như trong trường hợp 1.

Ví dụ: Tính tổng của chuỗi

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1/3)(n-2/3)}. \tag{14}$$

Bài giải. Ta có

$$\frac{1}{(n-1/3)(n-2/3)} = \frac{3}{n-2/3} - \frac{3}{n-1/3}.$$

Do đó áp dụng công thức (6) cho chuỗi (14) ta được

$$S = 3S(2/3) - 3S(1/3). \tag{15}$$

Theo công thức (12) ta có

$$S(2/3) = \int_0^1 \frac{(t^2-1)3dt}{t^3-1},\ S(1/3) = \int_0^1 \frac{(t-1)3tdt}{t^3-1},$$

do đó theo (15) ta có

$$S = 9\int_0^1 \frac{(t-1)dt}{t^3-1} = 9\int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1} = \pi\sqrt{3}.$$

Vậy $S = \pi\sqrt{3}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh. *Toán học cao cấp, tập 2*. Nhà Xuất bản Giáo dục. Năm xuất bản 2004.

[2] Рудин У., *Основы математического анализа*. Издательство “Мир”, Москва 1976. С. 72.

[3] TS. Phạm Văn Minh, *Tổng của một lớp chuỗi số*, Tạp chí Khoa học – Công nghệ Hàng hải – 2012, số 31, tr. 86-89.

Ngày nhận bài: 04/3/2016

Ngày phản biện: 10/3/2016

Ngày duyệt đăng: 14/3/2016