TRƯỜNG ĐẠI HỌC HÀNG HẢI VIỆT NAM
KHOA CƠ SỞ CƠ BẢN

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CẤP TRƯỜNG

PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ MỀM TÌM PHẦN TỬ CHUNG CỦA TẬP NGHIỆM BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÀ TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA NỬA NHÓM ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN

Chủ nhiệm đề tài:
ThS. Nguyễn Đình Dương

HẢI PHÒNG-NĂM 2016

Mục lục

Trang phụ bìa 1
Mục lục i
Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt ii
MỞ ĐẦU 1

Chương 1. MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ 4
1.1. Một số khái niệm cơ sở 4
1.2. Một số phương pháp tìm điểm bất động 10
1.2.1. Phương pháp lặp Krasnosel'skij-Mann 10
1.2.2. Phương pháp lặp Halpern 10
1.2.3. Phương pháp xấp xỉ mềm (viscosity approximation method) 11
1.3. Bài toán cân bằng 12
1.3.1. Bài toán cân bằng và các trường hợp riêng 12
1.3.2. Một số phương pháp tìm nghiệm bài toán cân bằng . . 13
1.4. Một số phương pháp tìm nghiệm bài toán cân bằng đồng thời là điểm bất động của nửa nhóm 15
1.5. Một số bổ đề bổ trợ 16

Chương 2. PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ MỀM 18
2.1. Phương pháp xấp xỉ mềm 18
2.2. Thử nghiệm số 27
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ 31
TÀI LIỆU THAM KHẢO 32

Một số ký hiệu và viết tắt

$\mathbb{N}$	tập số nguyên dương
$\mathbb{R}$	tập số thực
X	không gian Banach
X^*	không gian đối ngẫu của X
H	không gian Hilbert thực
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai vectơ x và y
$\|x\|$	chuẩn của vectơ x
$\inf M$	cận dưới đúng của tập hợp số M
$\sup M$	cận trên đúng của tập hợp số M
$\overline{M}$	bao đóng của tập hợp M
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$\partial f(x)$	dưới vi phân của f tại điểm x
$d(x, M)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập M
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
$\mathrm{Fix}(T)$ hoặc $F(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
EP	bài toán cân bằng
$\mathrm{SEP}(G, C)$	tập nghiệm của bài toán cân bằng
AXKG	ánh xạ không giãn
BTCB	bài toán cân bằng

MỞ ĐẦU

Bài toán chấp nhận lồi (convex feasibility problem) là bài toán: "Tìm phần tử thuộc giao của một họ các tập con đóng lồi C_i trong không gian Hilbert H hay không gian Banach X". Bài toán này đóng vai trò quan trọng trong xử lý ảnh, xử lí tín hiệu và được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực của y học, quân sự, công nghiệp ... (xem [6]), [14], [16],

Năm 1949, Neumann [38] đã xét trường hợp đơn giản, khi họ trên gồm 2 không gian con đóng C_1, C_2 của H và đề xuất phương pháp chiếu luân phiên xây dựng hai dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ như sau:

$$y_0 = x \in H,\ x_n = P_{C_1}(y_{n-1}),\ y_n = P_{C_2}(x_n). \tag{0.1}$$

Neumann đã chứng minh được cả hai dãy trên hội tụ mạnh đến $P_C(x)$ với $C = C_1 \cap C_2$. Năm 1965, Bregman [8] mở rộng công thức (0.1) cho trường hợp họ gồm hai tập con đóng lồi trong không gian Hilbert nhưng chỉ thu được sự hội tụ yếu.

Trường hợp phức tạp hơn, khi các tập con C_i trong họ được cho dưới dạng ẩn, như các tập con là các tập nghiệm của bài toán cân bằng [17]; các tập nghiệm của phương trình với toán tử loại đơn điệu (đơn điệu [12] và j-đơn điệu [1]); tập điểm bất động của họ hữu hạn đến vô hạn không đếm được các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert hay Banach (xem [2], [4], [5], [29], [31]).

Mới đây, người ta xét trường hợp họ trên chứa các tập con C_i không thuộc cùng loại kể trên. Đó là họ gồm tập nghiệm của bài toán cân bằng và tập nghiệm của phương trình với toán tử đơn điệu [37], ; họ gồm tập nghiệm của phương trình với toán tử đơn điệu và tập điểm bất động của ánh xạ không giãn [36] ...

Năm 2007, Takahashi S. và Takahashi W. [35] đã sử dụng phương pháp xấp xỉ mềm (viscosity approximation method) xây dựng dãy $\{x_n\}$ theo công thức: $x_0 \in H$,

$$\begin{cases} G(u_n, y) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)Tu_n, \end{cases} \tag{0.2}$$

trong đó $f : H \to H$ là ánh xạ co, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ và $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ thỏa mãn

$$(C1) \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \qquad (C2) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \qquad (C3) \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty,$$
$$(D1) \liminf_{n\to\infty} r_n > 0 \quad \text{và} \quad (D2) \sum_{n=1}^{\infty} |r_{n+1} - r_n| < \infty.$$

Khi đó dãy lặp $\{x_n\}$ hội tụ mạnh của về phần tử $p^* \in \mathrm{SEP}(G,C) \cap \mathrm{Fix}(T)$, trong đó $\mathrm{SEP}(G,C)$ và $\mathrm{Fix}(T)$ tương ứng là tập nghiệm của bài toán cân bằng với song hàm G và tập điểm bất động của ánh xạ không giãn T.

Năm 2010, Cianciaruso và các cộng sự [15] xét bài toán chấp nhận lồi khi họ gồm tập nghiệm của bài toán cân bằng và tập điểm bất động của nửa nhóm ánh xạ không giãn $\mathcal{S} = \{T(t) : 0 \le t < \infty\}$ trong toàn không gian Hilbert. Các tác giả đã mở rộng công thức (0.2) dưới dạng: $x_0 \in H$,

$$\begin{cases} G(u_n, y) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \ge 0, \quad \forall y \in H, \\ x_{n+1} = \alpha_n \gamma f(x_n) + (I - \alpha_n A)\dfrac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n \mathrm{d}s \end{cases} \tag{0.3}$$

và chỉ ra dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $p^* \in \mathrm{SEP}(G,H) \cap \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$ với các điều kiện:

$$(C1) \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \qquad (C2) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \qquad (C3) \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty;$$
$$(D1) \lim_{n\to\infty} t_n = \infty, \qquad (D2) \lim_{n\to\infty} \frac{|t_n - t_{n-1}|}{t_n}\frac{1}{\alpha_n} = 0;$$
$$(E1) \liminf_{n\to\infty} r_n > 0 \quad \text{và} \quad (E2) \sum_{n=1}^{\infty} |r_{n+1} - r_n| < \infty.$$

Mục đích chính của đề tài là: đề xuất một cách tiếp cận khác của phương pháp xấp xỉ mềm nhằm giảm nhẹ điều kiện đặt lên các dãy tham số trong các kết quả (0.2) của Takahashi S. và Takahashi W., kết quả (0.3) của Cianciaruso và các cộng sự.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung đề tài được trình bày thành 2 chương.

- Chương 1 trình bày một số khái niệm cơ bản về giải tích hàm, tổng quan về một số phương pháp tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn và điểm bất động chung của nửa nhóm ánh xạ không giãn; bài toán cân bằng; bài toán tìm phần tử chung của tập nghiệm bài toán cân bằng và tập điểm bất động của ánh xạ cũng như tập điểm bất động của nửa nhóm ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Phần cuối của chương là một số bổ đề bổ trợ cho việc chứng minh các kết quả nghiên cứu trong chương sau của đề tài.

- Chương 2 trình bày kết quả đạt được khi đề xuất một cách tiếp cận khác của phương pháp xấp xỉ mềm cho bài toán tìm phần tử $p^* \in \mathrm{SEP}(G, C) \cap \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$. Kết quả này đã cải tiến các kết quả (0.2) của Takahashi S. và Takahashi W. , kết quả (0.3) của Cianciaruso và các cộng sự khi bớt đi điều kiện (C3) và thay các điều kiện (D2), (E2) bằng các điều kiện yếu hơn. Ngoài ra, một ví dụ tính toán số cũng được thực hiện nhằm khẳng định tính đúng đắn của phương pháp.

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này chúng tôi đề cập đến những vấn đề sau. Mục 1.1. trình bày một số khái niệm cơ bản của giải tích hàm, toán tử đơn điệu và nửa nhóm ánh xạ không giãn (AXKG). Mục 1.2. giới thiệu tổng quan một số phương pháp tìm điểm bất động của AXKG cũng như điểm bất động chung của nửa nhóm AXKG. Mục 1.3. trình bày một số kiến thức cơ bản về bài toán cân bằng (BTCB). Mục 1.4. đề cập đến một số phương pháp tìm nghiệm bài toán cân bằng đồng thời là điểm bất động của nửa nhóm AXKG trong không gian Hilbert. Mục cuối cùng của chương là một số bổ đề được sử dụng để chứng minh các kết quả trong các chương tiếp theo của luận án.

1.1. Một số khái niệm cơ sở

Trong toàn bộ luận án, X được kí hiệu là không gian Banach thực với chuẩn $\|\cdot\|$. Không gian đối ngẫu của X kí hiệu bởi X^*. Với mọi $x \in X$ và mọi $f \in X^*$, ta đặt

$$\langle f, x\rangle := f(x).$$

Nếu $X = H$ là không gian Hilbert thực thì $\langle \cdot, \cdot\rangle$ là tích vô hướng trên H và $\|\cdot\|$ là chuẩn cảm sinh tương ứng.

Ta nói dãy $\{x_n\} \subset X$ hội tụ (hay hội tụ mạnh) tới $x \in X$, kí hiệu $x_n \to x$, nếu $\|x_n - x\| \to 0$ khi $n \to +\infty$. Dãy x_n được gọi là hội tụ yếu đến x, kí hiệu $x_n \rightharpoonup x$, nếu với mọi $y \in X^*$ bất kì nhưng cố định, $\langle y, x_n - x\rangle \to 0$ khi $n \to +\infty$. Mọi dãy hội tụ thì hội tụ yếu.

Ta kí hiệu

$$B\left[x_0, r\right] = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$$

và

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

lần lượt là hình cầu đóng và mở tâm x_0 bán kính r.

Định nghĩa 1.1 Cho tập con $C \subset X$.

- C giới nội nếu nó được chứa trong một hình cầu $B\left[x_0, r\right]$ nào đó, $0 \leq r < +\infty$. Mọi dãy hội tụ yếu đều giới nội.

- C là tập đóng (tương ứng đóng yếu) nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ và $x_n \to x$ (tương ứng $x_n \rightharpoonup x$) suy ra $x \in C$. Ta kí hiệu $\overline{C}$ là bao đóng của C, tức là tập đóng nhỏ nhất chứa C.

- C là compact nếu mọi dãy vô hạn $\{x_n\} \subset C$ đều chứa dãy con hội tụ.

- C là compact yếu nếu mọi dãy vô hạn $\{x_n\} \subset C$ đều chứa dãy con hội tụ yếu. Trong không gian Hilbert, mọi tập giới nội đều là compact yếu.

- C là lồi nếu với mọi $x, y \in C$ và mọi $\lambda \in [0,1]$ thì $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

Ta nói không gian Banach X có tính chất Opial nếu với mọi $\{x_n\} \subset X$ mà $x_n \rightharpoonup x_0$ và $x \neq x_0$ thì

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|.$$

Mọi không gian Hilbert H đều có tính chất Opial.

Định nghĩa 1.2 Phiếm hàm $f : X \to \mathbb{R}$ được gọi là

- chính thường nếu miền hữu hiệu của nó,

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in X : f(x) < +\infty\} \neq \emptyset;$$

- lồi nếu với mọi $x, y \in \mathcal{D}(f)$ và mọi $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y);$$

- lồi mạnh với hằng số $\beta > 0$ nếu với mọi $x, y \in \mathcal{D}(f)$ và mọi $\lambda \in (0,1)$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \frac{1}{2}\beta(1-\beta)\|x-y\|^2;$$

- hemi-liên tục trên nếu với mọi $x, y \in \mathcal{D}(f)$

$$\limsup_{\lambda\to 0^+} f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(y);$$

- nửa liên tục dưới tại $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$ và $x_n \to x_0$

$$\liminf_{n\to\infty} f(x) \geq f(x_0);$$

  Ta nói f là nửa liên tục dưới trên $\mathcal{D}(f)$ nếu nó nửa liên tục dưới tại mọi $x_0 \in \mathcal{D}(f)$;

$$f(x) > f(x_0) + \langle x^*, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in X.$$

Tập hợp các dưới gradient của f tại x_0

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in X^* : f(x) > f(x_0) + \langle x^*, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in X\}$$

được gọi là dưới vi phân của f tại x_0.

Định nghĩa 1.3 Cho C là tập con khác rỗng của H. Ánh xạ $T : C \to H$ được gọi là

- L-Lipschitz nếu tồn tại hằng số $L > 0$ sao cho với mọi $x, y \in C$,

$$\|Tx - Ty\| \leq L \|x - y\|;$$

- α-co nếu T là Lipschitz với hằng số $\alpha < 1$;
- không giãn nếu T là Lipschitz với hằng số 1; tức là với mọi $x, y \in C$,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|;$$

- không giãn chặt nếu với mọi $x, y \in C$,

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle Tx - Ty, x - y \rangle;$$

Ta kí hiệu tập điểm bất động của T là $\mathrm{Fix}(T)$, tức là

$$\mathrm{Fix}(T) = \{x \in C : Tx = x\}.$$

Đối với ánh xạ không giãn tập này có tính chất sau.

Mệnh đề 1.1 (Browder [10]) *Cho C là tập đóng lồi, khác rỗng và giới nội của H và $T : C \to C$ là AXKG. Khi đó Fix(T) là tập đóng lồi và khác rỗng.*

Toán tử chiếu trong không gian Hilbert

Định nghĩa 1.4 Cho C là tập con khác rỗng của H. Ta gọi

$$\begin{aligned} d_C : \ H &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \inf_{y \in C} \|x - y\| \end{aligned}$$

là hàm khoảng cách tới C.

Nếu C là tập đóng lồi thì với mọi $x \in H$ giá trị infimum trên đạt được tại duy nhất một điểm, kí hiệu là $P_C x$. Khi đó ánh xạ P_C ứng mỗi điểm ở trong H với điểm gần nó nhất ở trong C và được gọi là phép chiếu lên C. Như vậy, P_C thỏa mãn

$$\|x - P_C x\| \leq \|x - y\|, \quad \forall y \in C. \tag{1.1}$$

Ngoài ra, phép chiếu P_C thỏa mãn một số tính chất sau.

Mệnh đề 1.2 (Zarantonello[42], Goebel-Kirk [19]) *Cho phần tử $x \in H$ và $z \in C$. Khi đó $z = P_C x$ khi và chỉ khi*

$$\langle x - z, z - y \rangle \geq 0 \qquad \forall y \in C.$$

Từ đó ta có các hệ quả

(i) $\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \langle P_C x - P_C y, x - y \rangle$ *với mọi $x, y \in H$; tức phép chiếu là ánh xạ không giãn chặt;*

(ii) $\|x - P_C x\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|y - P_C x\|^2$ *với mọi $x \in H$ và $y \in C$.*

Nguyên lý bán đóng

Định nghĩa 1.5 Cho $C \subset X$ là tập đóng lồi của không gian Banach X. Ánh xạ $T : C \to X$ được gọi là bán đóng nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ thỏa mãn $x_n \rightharpoonup x_0 \in C$ và $Tx_n \to y_0 \in X$ thì $Tx_0 = y_0$. Ngoài ra, ta nói X thỏa mãn nguyên lý bán đóng nếu với mọi tập C đóng lồi của X và mọi ánh xạ không giãn $T : C \to X$ thì ánh xạ $I - T$ là bán đóng.

Trong trường hợp X là không gian Hilbert, ta có kết quả sau.

Mệnh đề 1.3 (Opial [30]) *Cho $C \subset H$ là tập đóng lồi và $T : C \to H$ là AXKG. Nếu $\{x_n\}$ là một dãy trong C và $x \in C$ thỏa mãn $x_n \rightharpoonup x$ và $x_n - Tx_n \to 0$ thì $x \in Fix(T)$.*

Toán tử đơn điệu

Cho $A : H \to 2^H$ là toán tử đa trị có miền xác định và miền giá trị lần lượt là

$$D(A) = \{x \in H : Ax \neq \emptyset\} \text{ và } R(A) = \bigcup \{Ax : x \in D(A)\}.$$

Đồ thị của A kí hiệu là gph$A$ và xác định bởi

$$\text{gph}A = \{(x, x^*) \in H \times H : x^* \in Ax\}.$$

Toán tử ngược $A^{-1} : H \to 2^H$ xác định bởi $A^{-1}x^* = \{x \in H : x^* \in Ax\}$, tức là

$$(x^*, x) \in \text{gph}A^{-1} \Leftrightarrow (x, x^*) \in \text{gph}A.$$

Định nghĩa 1.6 Toán tử A được gọi là

- đơn điệu nếu

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq 0, \quad \forall (x, x^*), (y, y^*) \in \mathrm{gph}A;$$

- đơn điệu mạnh nếu tồn tại hằng số $\eta > 0$ thỏa mãn

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq \eta \left\|x - y\right\|^2, \quad \forall (x, x^*), (y, y^*) \in \mathrm{gph}A;$$

- đơn điệu cực đại nếu nếu đồ thị của nó không là tập con thực sự của đồ thị một toán tử đơn điệu nào khác.

Nhận xét 1.1 Với $\lambda > 0$, nếu A đơn điệu thì A^{-1} và λA cũng đơn điệu; nếu A đơn điệu cực đại thì A^{-1} và λA cũng đơn điệu cực đại.

Ví dụ 1.1 Một số toán tử đơn điệu:

(1) $A : H \to H$ tuyến tính thỏa mãn $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in H$.

(2) Cho $T : C \to H$ là ánh xạ không giãn. Khi đó $I - T$ là đơn điệu.

(3) Với C là tập đóng lồi của H, P_C là toán tử đơn điệu.

Ví dụ 1.2 Cho $g : H \to \mathbb{R}$ là hàm lồi, chính thường và nửa liên tục dưới. Khi đó toán tử dưới vi phân

$$\partial g(x) = \{x^* \in H : g(y) \geq g(x) + \langle y - x, x^*\rangle,\ \forall y \in H\}$$

là toán tử đơn điệu cực đại.

Định nghĩa 1.7 Cho toán tử đa trị $A : H \to 2^H$. Với $\lambda > 0$, toán tử $J_\lambda : H \to 2^H$ xác định bởi

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$$

được gọi là toán tử giải của A.

Theo Bruck và Reich [11], nếu A là toán tử đơn điệu cực đại thì J_λ là đơn trị và $\mathrm{Fix}(J_\lambda) = A^{-1}(0)$, trong đó $A^{-1}(0)$ là tập không điểm của A, tức là

$$A^{-1}(0) = \{x \in D(A) : 0 \in Ax\}.$$

Tập này ngày càng đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết tối ưu và điểm bất động, cụ thể là:

- Nếu $A = I - T$, trong đó T là AXKG, thì $A^{-1}(0)$ chính là tập điểm bất động của T.
- Nếu $A = \partial g$, trong đó g là hàm lồi, chính thường và nửa liên tục dưới thì $A^{-1}(0)$ chính là tập điểm cực tiểu của g.

Nửa nhóm và phương trình tiến hóa

Cho C là tập đóng lồi và khác rỗng của H, họ ánh xạ $\mathcal{S} = \{T(t) : t \geq 0\}$ được gọi là nửa nhóm AXKG xác định trên C nếu nó thỏa mãn:

(i) $T(0)x = x$ với mọi $x \in C$;

(ii) $T(t+s)x = T(t) \circ T(s)x$ với mọi $t, s \in [0, \infty)$ và mọi $x \in C$;

(iii) $\|T(t)x - T(t)y\| \leq \|x - y\|$ với mọi $t \in [0, \infty)$ và mọi $x, y \in C$;

(iv) Với mỗi $x \in C$, $t \mapsto T(t)x$ là liên tục.

Kí hiệu $\mathrm{Fix}(S)$ là tập điểm bất động chung của $\mathcal{S}$, tức là

$$\mathrm{Fix}(\mathcal{S}) = \{x \in C : T(t)x = x, \forall t \geq 0\} = \bigcap_{t \geq 0} \mathrm{Fix}(T(t)).$$

Theo Brezis [9] nửa nhóm AXKG $\mathcal{S}$ nhận được từ toán tử đơn điệu cực đại A thông qua bài toán giá trị ban đầu:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au(t) \ni 0, \quad t \geq 0 \\ u(0) = x, \end{cases}$$

Bài toán này luôn có nghiệm duy nhất với mọi $x \in D(A)$ và khi đặt $T(t)x = u(t)$ người ta nhận được nửa nhóm $\mathcal{S}$ xác định trên $D(A)$ và có thể thác triển thành $\overline{D(A)} = C$ bởi sự liên tục. Khi đó:

- Với $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ với mọi $t \geq 0$.
- $\dfrac{d^+}{dt}T(t)x + A^0T(t)x = 0, \ \forall t \geq 0, x \in D(A)$.
- $\mathrm{Fix}(\mathcal{S}) = \{x \in C : T(t)x = x, \ \forall t \geq 0\} = A^{-1}(0)$.

Như vậy bài toán tồn tại và tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại có thể đưa về bài toán điểm bất động của AXKG hoặc nửa nhóm AXKG. Cách tiếp cận này cũng được áp dụng cho nhiều bài toán liên quan khác, điều đó đã làm cho AXKG trở thành một công cụ quan trọng trong lý thuyết tối ưu và toán tử đơn điệu.

1.2. Một số phương pháp tìm điểm bất động

Cho C là tập con của không gian Hilbert H và T là ánh xạ từ C vào C. Ta biết rằng nếu T là ánh xạ co thì với mọi $x \in C$, dãy lặp Picard $\{T^n x\}$ hội tụ mạnh về điểm bất động duy nhất của T. Tuy nhiên, nếu T là AXKG thì phải giả thiết thêm các điều kiện của C để đảm bảo sự tồn tại điểm bất động, thậm chí ngay cả khi có điểm bất động, dãy lặp trên nói chung cũng không hội tụ. Do đó, việc nghiên cứu các phương pháp để tìm điểm bất động của AXKG cũng như điểm bất động chung của nửa nhóm AXKG đã và đang là chủ đề sôi động trong những thập kỉ qua. Phần lớn những phương pháp này chủ yếu dựa trên 2 dạng: phương pháp lặp Mann và phương pháp lặp Halpern.

1.2.1. Phương pháp lặp Krasnosel'skij-Mann

Phương pháp lặp Mann [23] được Mann đề xuất đầu tiên vào năm 1953. Phương pháp này thực chất là sử dụng ánh xạ trung bình, tạo ra một dãy số theo sơ đồ lặp

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \quad n \geq 0 \tag{1.2}$$

trong đó $x_0 \in C$ bất kì và $\{\alpha_n\}$ là dãy trong $(0, 1)$. Trong trường hợp $\alpha_n = \lambda$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ phương pháp lặp Mann trở thành phương pháp lặp Krasnosel'skij [21]. Tuy nhiên dãy lặp $\{x_n\}$ nhận được chỉ hội tụ yếu (xem Genel và Lindenstrauss [18]).

1.2.2. Phương pháp lặp Halpern

Năm 1967, Halpern [20] đề xuất phương pháp lặp:

$$x_0 \in C, \quad x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) T x_n, \quad n \geq 0, \tag{1.3}$$

trong đó dãy $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ và $u \in C$ cố định. Ông đã chứng minh được rằng nếu T là AXKG xác định trên C sao cho $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ và $\alpha_n = n^{-a}$ với $a \in (0, 1)$ thì $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $P_{\mathrm{Fix}(T)} u$. Ngoài ra, Halpern cũng chỉ ra rằng

(C1) $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$ và

(C2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

là các điều kiện cần cho sự hội tụ của $\{x_n\}$.

Mười năm sau, Lions [22] đã mở rộng kết quả của Halpern bằng việc chứng minh sự hội tụ của dãy $\{x_n\}$ về $P_{\mathrm{Fix}(T)} u$ nếu $\{\alpha_n\}$ thỏa mãn điều kiện (C1), (C2) và

(C3)' $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_n^2} = 0.$

Để ý rằng, các điều kiện của Lions đối với $\{\alpha_n\}$ đã loại trừ trường hợp $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$. Để khắc phục điều này, năm 1992, Wittmann [39] đã chứng minh sự hội tụ mạnh của phương pháp lặp Halpern trong đó thay điều kiện (C3)' bằng điều kiện

(C3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty.$

Dễ thấy nếu $\{\alpha_n\}$ là dãy giảm thì (C3) chính là hệ quả của (C1) và (C2), do đó trong trường hợp này (C1) và (C2) chính là điều kiện cần và đủ để phương pháp lặp Halpern hội tụ.

1.2.3. Phương pháp xấp xỉ mềm (viscosity approximation method)

Cho T là AXKG xác định trên tập đóng lồi C, số thực $t \in (0,1]$ và ánh xạ co $f : C \to C$. Người ta xây dựng ánh xạ $T_t : C \to C$ bởi công thức

$$T_t x = tf(x) + (1-t)Tx, \quad \forall x \in C.$$

Dễ thấy T_t cũng là một ánh xạ co, do đó T_t có điểm bất động duy nhất x_t, tức x_t là nghiệm duy nhất của phương trình

$$x_t = tf(x_t) + (1-t)Tx_t, \quad t \in (0,1]. \tag{1.4}$$

Rời rạc hóa (1.4) ta nhận được công thức sau:

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)Tx_n, \quad n \geq 0, \tag{1.5}$$

trong đó $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$. Sự hội tụ của dãy lặp được cho bởi định lí sau.

Định lí 1.1 (Moudafi [28]) *Cho C là tập con đóng lồi và khác rỗng của không gian Hilbert H, $T : C \to C$ là AXKG thỏa mãn $Fix(T) \neq \emptyset$ và $f : C \to C$ là ánh xạ co. Giả sử dãy $\{x_n\}$ xác định bởi: $x_0 \in C$ và*

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+\varepsilon_n} Tx_n + \frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} f(x_n), \quad n \geq 0, \tag{1.6}$$

trong đó $\varepsilon_n \subset (0,1)$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n = \infty \text{ và } \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1+\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right| = 0.$$

Khi đó, $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $z \in Fix(T)$, trong đó $z = P_{Fix(T)} f(z)$.

Để ý rằng $z = P_{\mathrm{Fix}(T)} f(z)$ tương đương với z là nghiệm của bất đẳng thức biến phân

$$\langle (I - f)z, x - z\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{Fix}(T). \tag{1.7}$$

Mở rộng kết quả của Moudafi sang không gian Banach, Xu [40] đã chứng minh được rằng nếu $\{\alpha_n\}$ thỏa mãn điều kiện (C1), (C2) và

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty \text{ hoặc } \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$$

thì dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (1.5) hội tụ mạnh về $z \in \mathrm{Fix}(T)$. Các kết quả này cho phép áp dụng phương pháp xấp xỉ mềm cho bài toán tối ưu lồi, quy hoạch tuyến tính, bao hàm thức đơn điệu.

Ta biết rằng nếu f là ánh xạ $\tilde{\alpha}$ - co thì $F = I - f$ là $(1+\tilde{\alpha})$ - Lipschitz và $(1-\tilde{\alpha})$ - đơn điệu mạnh. Năm 2011, bằng việc sử dụng ánh xạ F trên, các tác giả Buong và Lang [13] đã cải tiến công thức (1.5) và đưa ra sơ đồ lặp:

$$\begin{cases} y_n &= (1-\alpha_n\mu)x_n + \alpha_n\mu f(x_n) = (I - \alpha_n\mu F)(x_n), \\ x_{n+1} &= (1-\beta_n)x_n + \beta_n T y_n, \end{cases} \tag{1.8}$$

trong đó $\beta_n \subset (a, b)$, với $a, b \in (0, 1)$, $\mu \in \big(0, 2(1-\tilde{\alpha})/(1+\tilde{\alpha})^2\big)$ và $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ chỉ cần thỏa mãn điều kiện (C1) và (C2). Với các giả thiết này, các tác giả đã chứng minh được sự hội tụ mạnh của dãy $\{x_n\}$ về phần tử z thỏa mãn (1.7).

Để nhận được các phương pháp tìm điểm bất động chung của nửa nhóm AXKG $\mathcal{S}$ hầu hết các tác giả đều mở rộng các phương pháp tìm điểm bất động của AXKG T được trình bày trong các Mục 1.2.1., 1.2.2. và 1.2.3.. Năm 2008, Plubtieng và Pupaeng [31] đã sử dụng phương pháp xấp xỉ mềm xây dựng dãy lặp theo công thức:

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + (1 - \beta_n - \alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s. \tag{1.9}$$

Các tác giả đã chứng minh được dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về phần tử $z \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$ nếu $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ thỏa mãn $\alpha_n + \beta_n < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, $\sum_{n\geq 1} \alpha_n = \infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$.

1.3. Bài toán cân bằng

1.3.1. Bài toán cân bằng và các trường hợp riêng

Trong lĩnh vực khoa học thuật ngữ "cân bằng" đã và đang được sử dụng một cách rộng rãi, như trong vật lý học, hóa học, kĩ thuật và kinh tế dựa

trên các mô hình toán học khác nhau. Chẳng hạn, trong vật lý, trạng thái cân bằng của hệ thống là trạng thái mà tổng các lực tác động lên hệ thống bằng 0 và trạng thái đó có thể duy trì trong một khoảng thời gian nhất định. Trong hóa học, đó là trạng thái mà các phản ứng thuận và nghịch diễn ra ở cùng tốc độ. Trong kinh tế là bài toán sản xuất cạnh tranh hay bài toán cung và cầu động sử dụng mô hình của trò chơi bất hợp tác và khái niệm cân bằng Nash [3]. Trong luận án này, chúng tôi xét lớp bài toán cân bằng sau.

Cho song hàm $G : C \times C \to \mathbb{R}$. Bài toán cân bằng với G là tìm phần tử $x^* \in C$ thỏa mãn

$$G(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in C, \tag{EP}$$

trong đó G thỏa mãn các điều kiện sau:

(A1) $G(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$;

(A2) G là song hàm đơn điệu, tức là $G(x, y) + G(y, x) \leq 0$ với mọi $x, y \in C$;

(A3) $\limsup_{t \to 0^+} G(tz + (1-t)x, y) \leq G(x, y)$ với mọi $x, y, z \in C$;

(A4) $G(x, \cdot)$ lồi và nửa liên tục dưới với mọi $x \in C$.

Tập nghiệm của EP được kí hiệu bởi $\mathrm{SEP}(G, C)$. Theo Blum và Oettli [7] bài toán cân bằng EP khá đơn giản về hình thức nhưng lại bao hàm trong nó nhiều bài toán quan trọng như bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, điểm bất động Kakutani, điểm yên ngựa, cân bằng Nash, ... Điểm thú vị của EP là nó đã hợp nhất các bài toán trên theo một phương pháp nghiên cứu chung khá tổng quát và tiện dụng.

1.3.2. Một số phương pháp tìm nghiệm bài toán cân bằng

Việc tìm nghiệm của bài toán cân bằng là một đề tài hấp dẫn, thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước. Đến nay, đã có nhiều phương pháp được đề xuất như: nguyên lý bài toán phụ [26], phương pháp hàm đánh giá [25]; phương pháp extragradient [32] và phương pháp điểm gần kề [27], [17].

Phương pháp điểm gần kề được đề xuất bởi Martinet [24] cho bài toán bất đẳng thức biến phân và được mở rộng bởi Rockafellar [33] cho bài toán tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại. Ý tưởng chính của phương pháp này là: xây dựng các bài toán hiệu chỉnh bằng cách cộng thêm vào toán tử của bài toán gốc một toán tử đơn điệu mạnh phụ thuộc vào tham số sao cho bài toán hiệu chỉnh có nghiệm duy nhất. Khi đó, với các điều kiện phù hợp, dãy lặp nhận được bằng cách giải bài toán hiệu chỉnh, có giới hạn là

một nghiệm nào đó của bài toán gốc khi cho tham số dần tới một điểm giới hạn thích hợp. Cụ thể, để giải bài toán cân bằng EP theo phương pháp điểm gần kề, người ta giải dãy bài toán phụ

$$\text{Tìm } x_n \in C \text{ sao cho } G_n(x_n, y) := \begin{aligned} & G(x_n, y) \\ & +c_n\langle x_n - x_{n-1}, y - x_n\rangle \geq 0, \ \forall y \in C, \end{aligned}$$

trong đó $c_n > 0$ và $g(x, y) = \langle x - x_g, y - x\rangle$ là song hàm đơn điệu mạnh trên C.

Năm 1999, Moudafi [27] đã áp dụng phương pháp điểm gần kề cho EP theo sơ đồ sau:

$$x_{n+1} \in C : G(x_{n+1}, y) + \frac{1}{\lambda}\langle x_{n+1} - x_n, y - x_{n+1}\rangle \geq 0, \ \forall y \in C, \tag{1.10}$$

trong đó $x_0 \in C$ là điểm cho trước và $\lambda > 0$. Sự hội tụ của $\{x_n\}$ được cho bởi định lí dưới đây.

Định lí 1.2 (Moudafi [27]) *Giả sử song hàm G thỏa mãn (A1)-(A4). Khi đó với mỗi n, bài toán* (1.10) *có nghiệm duy nhất x_{n+1} và dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về nghiệm của EP. Ngoài ra, nếu G đơn điệu mạnh thì $\{x_n\}$ hội tụ yếu về nghiệm duy nhất của EP.*

Năm 2005, Combettes và Hirstoaga [17] đã đưa ra một số phương pháp tìm phần tử $P_{\mathrm{SEP}(G,C)}(a)$ với $a \in H$ cho trước. Các kết quả này đều dựa trên bổ đề sau đây.

Bổ đề 1.1 (Combettes-Hirstoaga [17]) *Cho C là tập con đóng lồi và khác rỗng của H, G là song hàm thỏa mãn (A1)-(A4). Với mỗi $r > 0$, $x \in H$, định nghĩa ánh xạ $T_r : H \to C$ bởi*

$$T_r x = \left\{ z \in C : G(z, y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \right\}. \tag{1.11}$$

Khi đó,

(i) T_r đơn trị;

(ii) T_r là ánh xạ không giãn chặt, tức là với mọi $x, y \in H$,

$$\|T_r x - T_r y\|^2 \leq \langle T_r x - T_r y, x - y\rangle;$$

(iii) $Fix(T_r) = SEP(G, C)$;

(iv) $SEP(G, C)$ là tập đóng lồi.

1.4. Một số phương pháp tìm nghiệm bài toán cân bằng đồng thời là điểm bất động của nửa nhóm

Năm 2007, Takahashi S. và Takahashi W. [35] đã kết hợp Bổ đề 1.1 với phương pháp xấp xỉ mềm và đề xuất phương pháp tìm phần tử $p^* \in \mathrm{SEP}(G, C) \cap \mathrm{Fix}(T)$.

Định lí 1.3 (Takahashi-Takahashi [35]) *Cho C là tập con đóng lồi và khác rỗng của H, song hàm G thỏa mãn (A1)-(A4) và $T : C \to H$ là AXKG sao cho SEP$(G, C) \cap$ Fix$(T) \neq \emptyset$. Giả sử f là ánh xạ co từ H vào H và $\{x_n\}$ là dãy xác định bởi $x_1 \in H$,*

$$\begin{cases} G(u_n, y) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)Tu_n, \quad \forall n \geq 1, \end{cases} \tag{1.12}$$

trong đó $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ và $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty,$$
$$\liminf_{n\to\infty} r_n > 0 \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |r_{n+1} - r_n| < \infty.$$

Khi đó $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $p^* = P_{SEP(G,C)\cap Fix(T)} f(p^*)$ đồng thời là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân $\langle (I - f)p^*, x - p^*\rangle \geq 0$ với mọi $x \in$ SEP$(G, C) \cap$ Fix(T).

Mở rộng kết quả trên, năm 2010, Cianciaruso và các cộng sự [15] đã đề xuất phương pháp tìm nghiệm của EP đồng thời là điểm bất động của nửa nhóm $\mathcal{S}$ trong trường hợp $C \equiv H$.

Định lí 1.4 (Cianciaruso [15]) *Cho song hàm G thỏa mãn (A1)-(A4) và $\mathcal{S}$ là nửa nhóm AXKG xác định trên H sao cho SEP$(G, H) \cap$ Fix$(\mathcal{S}) \neq \emptyset$. Giả sử $f : H \to H$ là ánh xạ co với hệ số α, $A : H \to H$ là toán tử tuyến tính bị chặn xác định dương mạnh, tức là tồn tại $\bar{\gamma} > 0$ sao cho $\langle Ax, x\rangle \geq \bar{\gamma}\,\|x\|^2$, $\forall x \in H$ và số thực γ thỏa mãn $0 < \gamma < \dfrac{\bar{\gamma}}{\alpha}$. Giả sử $\{x_n\}$ là dãy xây dựng bởi:*

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ G(u_n, y) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in H, \\ x_{n+1} = \alpha_n \gamma f(x_n) + (I - \alpha_n A)\dfrac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds, \quad \forall n \geq 1, \end{cases} \tag{1.13}$$

Khi đó $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về phần tử $p^* \in SEP(G,C) \cap Fix(\mathcal{S})$ với các điều kiện của $\{\alpha_n\}$, $\{t_n\}$ và $\{r_n\}$:

$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty;$

$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \dfrac{|t_n - t_{n-1}|}{t_n} \dfrac{1}{\alpha_n} = 0;$

$\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} |r_{n+1} - r_n| < \infty.$

1.5. Một số bổ đề bổ trợ

Bổ đề 1.2 (Cianciaruso và cộng sự [15]) *Giả sử các giả thiết (A1)-(A4) được thỏa mãn, nếu $x, y \in H$ và $r_1, r_2 > 0$, thì*

$$\|T_{r_2}y - T_{r_1}x\| \le \|y - x\| + \frac{|r_2 - r_1|}{r_2} \|T_{r_2}y - y\|.$$

Bổ đề 1.3 (Shimizu và Takahashi [34]) *Giả sử C là tập khác rỗng, đóng và bị chặn của H và $\{T(s) : 0 \le s < \infty\}$ là nửa nhóm AXKG trên C. Khi đó với mọi $h \ge 0$,*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in C} \left\| \frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds - T(h)\frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds \right\| = 0.$$

Bổ đề 1.4 *Trong không gian Hilbert thực H, ta luôn có*

$$\|x + y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\langle y, x + y\rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

Bổ đề 1.5 (Shimizu và Takahashi [34]) *Giả sử $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là các dãy bị chặn trong không gian Banach X và $\{\beta_n\}$ là dãy trong $[0,1]$ với $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \le \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$. Giả sử $x_{n+1} = (1-\beta_n)x_n + \beta_n y_n$ với mọi số nguyên $n \ge 1$ và $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \le 0$. Khi đó $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0$.*

Trong [41] nếu chọn $T = I$, ta có được bổ đề sau.

Bổ đề 1.6 (Yamada [41]) $\left\|T^\lambda x - T^\lambda y\right\| \le (1-\lambda\tau)\|x - y\|$ *với $\mu \in (0, 2\eta/L^2)$ cố định, $\lambda \in (0,1)$, trong đó $\tau = 1 - \sqrt{1 - \mu(2\eta - \mu L^2)} \in (0,1)$,*

$$T^\lambda x = (I - \lambda\mu F)x$$

và F là L liên tục Lipschitz và đơn điệu mạnh với hằng số η.

Bổ đề 1.7 (Takahashi và Toyoda [36]) *Giả sử* $\{\alpha_n\}$ *là dãy số thực thỏa mãn* $0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1$ *với mọi* $n \geq 0$ *và* $\{v_n\}$ *và* $\{w_n\}$ *là các dãy trong* H *thỏa mãn*

$$\limsup_{n\to\infty} \|v_n\| \leq c; \limsup_{n\to\infty} \|w_n\| \leq c; \lim_{n\to\infty} \|\alpha_n v_n + (1-\alpha_n) w_n\| = c.$$

Khi đó $\lim_{n\to\infty} \|v_n - w_n\| = 0$.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 1

Trong chương này chúng tôi đã trình bày một số kiến thức cơ bản về giải tích hàm, toán tử đơn điệu, nửa nhóm AXKG và bài toán cân bằng trong không gian Hilbert. Ngoài ra, chúng tôi cũng giới thiệu một số phương pháp tìm phần tử chung của tập nghiệm bài toán cân bằng và tập điểm bất động của ánh xạ cũng như của nửa nhóm AXKG. Trong chương 2, chúng tôi đề xuất một cách tiếp cận khác của phương pháp xấp xỉ mềm nhằm giảm nhẹ các điều kiện đặt lên các dãy tham số trong các công thức (1.12) và (1.13).

Chương 2

PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ MỀM

Chương này gồm 2 mục. Mục 2.1. được dành để trình bày một cách tiếp cận khác của phương pháp xấp xỉ mềm tìm $p^* \in \mathrm{SEP}(G, C) \cap \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$. Mục 2.2. đưa ra ví dụ và kết quả tính toán số minh họa cho phương pháp trên..

2.1. Phương pháp xấp xỉ mềm

Nhằm giảm nhẹ các điều kiện đặt lên các dãy tham số trong kết quả của Takahashi S. và Takahashi W., kết quả của Cianciaruso và các cộng sự, chúng tôi đề xuất một cách tiếp cận khác của phương pháp xấp xỉ mềm dựa trên kĩ thuật của Buong và Lang [13].
Chúng tôi có kết quả sau.

Định lí 2.1 *Cho $f : C \to C$ là ánh xạ co với hệ số $\tilde{\alpha} \in [0, 1)$, song hàm G thỏa mãn (A1)-(A4) và $\mathcal{S}$ là nửa nhóm AXKG xác định trên C sao cho $SEP(G, C) \cap Fix(\mathcal{S}) \neq \emptyset$. Giả sử $\{x_n\}$ là dãy xây dựng bởi: $x_1 \in C$,*

$$\begin{cases} y_n = (1 - \alpha_n \mu)x_n + \alpha_n \mu f(x_n), \\ u_n \in C : G(u_n, y) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - y_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ x_{n+1} = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n \dfrac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds, \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $\mu \in \big(0, 2(1 - \tilde{\alpha})/(1 + \tilde{\alpha})^2\big)$, các dãy $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ trong $(0, 1)$ và $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ thỏa mãn:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$*;*

(2) $0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \beta_n < 1$*;*

(3) $0 < c \leq r_n < \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$*;*

(4) $\{t_n\} \subset (0, \infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|t_{n+1} - t_n|}{t_{n+1}} = 0$.

Khi đó dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về p^* với $p^* = P_{SEP(G,C)\cap Fix(\mathcal{S})} f(p^*)$.

Chứng minh.
Việc chứng minh định lí được thực hiện qua 6 bước dưới đây:
Bước 1. Chứng minh $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{u_n\}$ bị chặn.

Trước hết, để ý rằng $\mathrm{Fix}(\mathcal{S}) \cap \mathrm{SEP}(G,C)$ là tập đóng, lồi vì $\mathrm{Fix}(\mathcal{S})$ và $\mathrm{SEP}(G,C)$ là các tập đóng, lồi. Để đơn giản ta kí hiệu $\Omega = \mathrm{Fix}(\mathcal{S}) \cap \mathrm{SEP}(G,C)$, $F = I - f$.

Với mọi $p \in \Omega$ và từ $u_n = T_{r_n} y_n$, ta có

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= ||(1-\beta_n)x_n + \beta_n \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds - p|| \\
&= ||(1-\beta_n)(x_n - p) + \beta_n(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds - p)|| \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \|T(s)u_n - T(s)p\| ds \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n \|u_n - p\| \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n \|T_{r_n} y_n - T_{r_n} p\| \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n \|y_n - p\|
\end{aligned}$$

Theo Bổ đề 1.6

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n \|(1-\alpha_n\mu)x_n + \alpha_n\mu f(x_n) - p\| \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n \|(I - \alpha_n\mu F)x_n - p\| \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| \\
&\quad + \beta_n [(1-\alpha_n\tau)\|x_n - p\| + \alpha_n\mu \|F(p)\|] \\
&\leq (1-\beta_n\alpha_n\tau)\|x_n - p\| + \beta_n\alpha_n\tau\frac{\mu}{\tau}\|F(p)\|.
\end{aligned}$$

Đặt $M_p = \max\{\|x_1 - p\|, \mu\|F(p)\|/\tau\}$. Khi đó, $\|x_1 - p\| \leq M_p$.

Như vậy, nếu $\|x_n - p\| \leq M_p$ thì

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1-\beta_n\alpha_n\tau)M_p + \beta_n\alpha_n\tau M_p = M_p.$$

Do đó dãy $\{x_n\}$ bị chặn. Vì

$$\begin{aligned}
\|F(x_n) - F(p)\| &\leq (1+\tilde{\alpha})\|x_n - p\| \\
\|y_n - p\| &\leq (1-\alpha_n\tau)\|x_n - p\| + \alpha_n\mu\|F(p)\| \\
\|u_n - p\| &= \|T_{r_n} y_n - T_{r_n} p\| \leq \|y_n - p\|,
\end{aligned}$$

nên các dãy $\{F(x_n)\}$, $\{y_n\}$, $\{u_n\}$ cũng bị chặn. Không mất tính tổng quát, giả sử $\|F(x_n)\| \leq M_1 \in \mathbb{R}$.
Bước 2. Chứng minh $\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x_n\| = 0$.

Đặt $\sigma_n = \dfrac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds$. Với $p \in \Omega$, ta có

$$\begin{aligned}
\|\sigma_{n+1} - \sigma_n\| &= ||\frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} T(s)u_{n+1}ds - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds|| \\
&= ||\frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} T(s)u_{n+1}ds - \frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} T(s)u_n ds \\
&\quad + \frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} T(s)u_n ds - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds|| \\
&= ||\frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} (T(s)u_{n+1} - T(s)u_n)ds \\
&\quad + \Big(\frac{1}{t_{n+1}} - \frac{1}{t_n}\Big)\int_0^{t_n} T(s)u_n ds + \frac{1}{t_{n+1}}\int_{t_n}^{t_{n+1}} T(s)u_n ds|| \\
&= ||\frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} (T(s)u_{n+1} - T(s)u_n)ds \\
&\quad + \Big(\frac{1}{t_{n+1}} - \frac{1}{t_n}\Big)\int_0^{t_n} (T(s)u_n - T(s)p)ds \\
&\quad + \Big(\frac{1}{t_{n+1}} - \frac{1}{t_n}\Big)\int_0^{t_n} T(s)p ds + \frac{1}{t_{n+1}}\int_{t_n}^{t_{n+1}} T(s)u_n ds|| \\
&= ||\frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} (T(s)u_{n+1} - T(s)u_n)ds \\
&\quad + \Big(\frac{1}{t_{n+1}} - \frac{1}{t_n}\Big)\int_0^{t_n} (T(s)u_n - T(s)p)ds \\
&\quad + \frac{1}{t_{n+1}}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (T(s)u_n - T(s)p)ds||
\end{aligned}$$

$$\|\sigma_{n+1} - \sigma_n\| \leq \|u_{n+1} - u_n\| + \frac{2|t_{n+1} - t_n|}{t_{n+1}}\|u_n - p\|.$$

Theo Bổ đề 1.2 ta có

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u_n\| &= \|T_{r_n}y_{n+1} - T_{r_n}y_n\| \leq \|y_{n+1} - y_n\| \\
&\quad + \frac{|r_{n+1} - r_n|}{r_{n+1}}\|u_{n+1} - y_{n+1}\|.
\end{aligned}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned}
\|\sigma_{n+1}-\sigma_n\| &\leq \|y_{n+1}-y_n\| + \frac{|r_{n+1}-r_n|}{r_{n+1}}\|u_{n+1}-y_{n+1}\| \\
&\quad + \frac{2|t_{n+1}-t_n|}{t_{n+1}}\|u_n-p\| \\
&= \|(I-\alpha_{n+1}\mu F)x_{n+1}-(I-\alpha_n\mu F)x_n\| \\
&\quad + \frac{|r_{n+1}-r_n|}{r_{n+1}}\|u_{n+1}-y_{n+1}\| + \frac{2|t_{n+1}-t_n|}{t_{n+1}}\|u_n-p\| \\
&\leq \|x_{n+1}-x_n\| + (\alpha_{n+1}+\alpha_n)\mu M_1 \\
&\quad + \frac{|r_{n+1}-r_n|}{r_{n+1}}\|u_{n+1}-y_{n+1}\| + \frac{2|t_{n+1}-t_n|}{t_{n+1}}\|u_n-p\| \\
&\leq \|x_{n+1}-x_n\| + (\alpha_{n+1}+\alpha_n)\mu M_1 \\
&\quad + \frac{|r_{n+1}-r_n|}{c}\|u_{n+1}-y_{n+1}\| + \frac{2|t_{n+1}-t_n|}{t_{n+1}}\|u_n-p\|.
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\|\sigma_{n+1}-\sigma_n\| - \|x_{n+1}-x_n\|\right) \leq 0.$$

Theo Bổ đề 1.5 suy ra $\lim_{n\to\infty}\|\sigma_n - x_n\| = 0$. Như vậy,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\| = \lim_{n\to\infty}\beta_n\|\sigma_n - x_n\| = 0. \tag{2.2}$$

Bước 3. Chứng minh $\lim_{n\to\infty}\|u_n - y_n\| = 0$ và $\lim_{n\to\infty}\|u_n - x_n\| = 0$.

Với $p \in \Omega$, ta có

$$\begin{aligned}
\|u_n-p\|^2 &= \|T_{r_n}y_n - T_{r_n}p\|^2 \\
&\leq \langle y_n - p, u_n - p\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left[\|y_n-p\|^2 + \|u_n-p\|^2 - \|u_n-y_n\|^2\right].
\end{aligned}$$

Khi đó

$$\|u_n-p\|^2 \leq \|y_n-p\|^2 - \|u_n-y_n\|^2. \tag{2.3}$$

Do tính lồi của $\|\cdot\|^2$ nên suy ra

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-p\|^2 &= ||(1-\beta_n)(x_n-p)+\beta_n(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)u_n ds-p)||^2 \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n-p\|^2+\beta_n||\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}(T(s)u_n-T(s)p)ds||^2 \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n-p\|^2+\beta_n\|u_n-p\|^2 \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n-p\|^2+\beta_n\left[\|y_n-p\|^2-\|u_n-y_n\|^2\right] \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n-p\|^2 \\
&\quad +\beta_n\left[\|(I-\alpha_n\mu F)x_n-p\|^2-\|u_n-y_n\|^2\right] \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n-p\|^2 \\
&\quad +\beta_n\left[\|(I-\alpha_n\mu F)(x_n-p)-\alpha_n\mu F(p)\|^2-\|u_n-y_n\|^2\right] \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n-p\|^2 \\
&\quad +\beta_n[(1-\alpha_n\tau)\|x_n-p\|^2+\alpha_n^2\mu^2\|F(p)\|^2 \\
&\quad +2\alpha_n\mu(1-\alpha_n\tau)\|x_n-p\|\|F(p)\|-\|u_n-y_n\|^2] \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n-p\|^2+\beta_n\|x_n-p\|^2+\alpha_n^2\mu^2\|F(p)\|^2 \\
&\quad +2\alpha_n\mu\|x_n-p\|\|F(p)\|-\beta_n\|u_n-y_n\|^2]
\end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned}
\beta_n\|u_n-y_n\|^2 &\leq \|x_n-p\|^2-\|x_{n+1}-p\|^2 \\
&\quad +\alpha_n^2\mu^2\|F(p)\|^2+2\alpha_n\mu\|x_n-p\|\|F(p)\| \\
&\leq \|x_n-x_{n+1}\|(\|x_n-p\|+\|x_{n+1}-p\|)+\alpha_n^2\mu^2\|F(p)\|^2 \\
&\quad +2\alpha_n\mu\|x_n-p\|\|F(p)\|
\end{aligned}$$

Vì $\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$ and $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ nên

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-y_n\|=0. \tag{2.4}$$

Theo (2.1), ta có

$$\|y_n-x_n\|=\alpha_n\mu\|F(x_n)\|\leq\alpha_n\mu M_1.$$

Từ đó nhận được

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_n\|=0. \tag{2.5}$$

Do $\|u_n-x_n\|\leq\|u_n-y_n\|+\|y_n-x_n\|$ nên

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-x_n\|=0. \tag{2.6}$$

Bước 4. Chứng minh $\lim_{n\to\infty}\|T(s)u_n-u_n\|=0$, với mọi $0<s<\infty$.

Ta có

$$\begin{aligned}\|T(s)u_n - u_n\| &= ||T(s)u_n - T(s)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds \\ &\quad + T(s)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds \\ &\quad + \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds - u_n||\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|T(s)u_n - u_n\| &\leq ||T(s)u_n - T(s)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds|| \\ &\quad + ||T(s)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds|| \\ &\quad + ||\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds - u_n|| \qquad (2.7) \\ &\leq 2||\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds - u_n|| \\ &\quad + ||T(s)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds||.\end{aligned}$$

Để ý rằng,

$$\begin{aligned}||\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds - u_n|| &\leq ||\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds - x_n|| + \|x_n - u_n\| \\ &\leq ||\frac{1}{\beta_n}[x_{n+1} - (1-\beta_n)x_n] - x_n|| \\ &\quad + \|x_n - u_n\|\end{aligned}$$

tức là,

$$||\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds - u_n|| \leq \frac{1}{\beta_n}\|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - u_n\| \to 0. \qquad (2.8)$$

Với $p \in \Omega$, đặt $C_1 = \{x \in C : \|x - p\| \leq M_p\}$. Dễ thấy rằng C_1 là tập lồi, đóng và bị chặn và $T(s)C_1$ là tập con của C_1. Vì

$$\begin{aligned}\|u_n - p\| &= \|T_{r_n}y_n - p\| \leq \|y_n - p\| = \|(I - \alpha_n\mu F)x_n - p\| \\ &\leq (1-\alpha_n\tau)\|x_n - p\| + \alpha_n\mu\|F(p)\| \\ &\leq (1-\alpha_n\tau)\|x_n - p\| + \alpha_n\tau\frac{\mu}{\tau}\|F(p)\| \\ &\leq (1-\alpha_n\tau)M_p + \alpha_n\tau M_p = M_p,\end{aligned}$$

nên $\{u_n\}$ nằm trong C_1. Theo Bổ đề 1.3 suy ra

$$\lim_{n\to\infty} ||T(s)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds|| = 0. \qquad (2.9)$$

Kết hợp (2.7), (2.8), (2.9), ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty} \|T(s)u_n - u_n\| = 0. \qquad (2.10)$$

Bước 5. Chứng minh $\limsup_{n\to\infty}\langle F(p^*), p^* - x_n\rangle \le 0$, trong đó $p^* = P_\Omega f(p^*)$.

Thật vậy, do $\{x_n\}$ bị chặn nên tồn tại dãy con $\{x_{n_j}\}$ của $\{x_n\}$ thỏa mãn $x_{n_j} \rightharpoonup \omega$ và

$$\limsup_{n\to\infty}\langle F(p^*), p^* - x_n\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle F(p^*), p^* - x_{n_j}\rangle \tag{2.11}$$

Từ (2.6) suy ra $u_{n_j} \rightharpoonup \omega$. Vì $\{u_{n_j}\} \subset C$ và C là lồi, đóng nên $\omega \in C$. Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\omega \in \Omega$.

Trước hết ta chứng minh $\omega \in \mathrm{SEP}(G, C)$. Do $u_n = T_{r_n} y_n$, ta có

$$G(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - y_n\rangle \ge 0, \forall y \in C.$$

Từ tính đơn điệu của G suy ra

$$\frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - y_n\rangle \ge G(y, u_n), \forall y \in C.$$

Thay n bởi n_j, ta nhận được

$$\langle y - u_{n_j}, \frac{u_{n_j} - y_{n_j}}{r_{n_j}}\rangle \ge G(y, u_{n_j}), \forall y \in C.$$

Từ (2.4) và (A4), ta có

$$G(y, \omega) \le 0, \forall y \in C.$$

Với $0 < t \le 1, y \in C$, đặt $y_t = ty + (1-t)\omega$. Ta có $y_t \in C$ và $G(y_t, \omega) \le 0$. Khi đó

$$0 = G(y_t, y_t) \le tG(y_t, y) + (1-t)G(y_t, \omega) \le tG(y_t, y).$$

Chia hai vế cho t, ta được

$$G(y_t, y) \ge 0.$$

Cho $t \to 0$ và do (A3), ta được

$$G(\omega, y) \ge 0, \forall y \in C.$$

Tức là, $\omega \in \mathrm{SEP}(G, C)$.

Tiếp theo ta chứng minh $\omega \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$. Giả sử $\omega \notin \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$, tức là

$$\exists s_0 > 0, \text{ thỏa mãn } T(s_0)\omega \ne \omega.$$

Từ tính chất Opial và (2.10), ta có

$$\begin{aligned}
\liminf_{j\to\infty}\left\|u_{n_j} - \omega\right\| &< \liminf_{j\to\infty}\left\|u_{n_j} - T(s_0)\omega\right\| \\
&\le \liminf_{j\to\infty}\|u_{n_j} - T(s_0)u_{n_j} \\
&\quad + T(s_0)u_{n_j} - T(s_0)\omega\| \\
&\le \liminf_{j\to\infty}\left\|T(s_0)u_{n_j} - T(s_0)\omega\right\| \\
&\le \liminf_{j\to\infty}\left\|u_{n_j} - \omega\right\|.
\end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn, suy ra $\omega \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$. Vậy $\omega \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S}) \cap \mathrm{SEP}(G, C)$. Khi đó, từ (2.11) và tính chất của phép chiếu, ta có

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \langle F(p^*), p^* - x_n\rangle &= \limsup_{n\to\infty} \langle p^* - f(p^*), p^* - x_n\rangle \\
&= \lim_{j\to\infty} \langle p^* - f(p^*), p^* - x_{n_j}\rangle \\
&= \langle p^* - f(p^*), p^* - \omega\rangle \le 0.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Bước 6. Chứng minh $x_n \to p^* \in \Omega$. Từ (2.1), ta có

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p^*\|^2 &= ||(1-\beta_n)x_n + \beta_n \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds - p^*||^2 \\
&\le (1-\beta_n)\|x_n - p^*\|^2 + \beta_n ||\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n ds - p^*||^2 \\
&\le (1-\beta_n)\|x_n - p^*\|^2 + \beta_n \|u_n - p^*\|^2 \\
&\le (1-\beta_n)\|x_n - p^*\|^2 + \beta_n \|y_n - p^*\|^2 \\
&\le (1-\beta_n)\|x_n - p^*\|^2 \\
&\quad +\beta_n \|(I - \alpha_n\mu F)(x_n - p^*) - \alpha_n\mu F(p^*)\|^2 \\
&\le (1-\beta_n)\|x_n - p^*\|^2 + \beta_n[(1-\alpha_n\tau)\|x_n - p^*\|^2 \\
&\quad -2\alpha_n\mu\langle F(p^*), x_n - p^* - \alpha_n\tau F(x_n)\rangle] \\
&\le (1-\alpha_n\beta_n\tau)\|x_n - p^*\|^2 \\
&\quad +\alpha_n\beta_n\tau\Big[\frac{2\mu}{\tau}\langle F(p^*), p^* - x_n\rangle + \alpha_n\frac{2\mu^2}{\tau}\|F(p^*)\| M_1\Big].
\end{aligned}$$

Sử dụng Bổ đề **??** với $a_n = \|x_n - p^*\|$, $b_n = \beta_n\alpha_n\tau$ và

$$c_n = \frac{2\mu}{\tau}\langle F(p^*), p^* - x_n\rangle + \alpha_n\frac{2\mu^2}{\tau}\|F(p^*)\| M_1,$$

và (2.12), ta được $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $p^* \in \Omega$. □

Nhận xét 2.1 (a) Định lí 2.1 đã bớt đi điều kiện (C3) $\sum |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ trong kết quả của Takahashi S. và Takahashi W. cũng như kết quả của Cianciaruso và các cộng sự.

Ví dụ 2.1 Xét dãy $\{\alpha_n\}$ xác định bởi

$$\alpha_n = \begin{cases} (k+1)^{-1/2} & \text{nếu } n = 2k \\ (k+1)^{-1/2} + (k+1)^{-1} & \text{nếu } n = 2k+1 \end{cases} \tag{2.13}$$

Dễ dàng kiểm tra được $\{\alpha_n\}$ thỏa mãn điều kiện (C1) và (C2) nhưng không thỏa mãn (C3).

(b) Ngoài ra, Định lí 2.1 đã thay điều kiện (D2) và (E2) tương ứng bằng các điều kiện yếu hơn $\lim\limits_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|t_{n+1} - t_n|}{t_{n+1}} = 0$.

Ví dụ 2.2 (i) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|t_n - t_{n-1}|}{t_n}\dfrac{1}{\alpha_n} = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|t_{n+1} - t_n|}{t_{n+1}} = 0$.
(ii) Điều ngược lại nói chung không đúng.
Thật vậy, do $\{t_n\} \subset (0, \infty)$ và $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ nên

$$\frac{|t_n - t_{n-1}|}{t_n} \leq \frac{|t_n - t_{n-1}|}{t_n}\frac{1}{\alpha_n},$$

từ đó suy ra (i). Mặt khác, nếu chọn $t_n = n$ và $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|t_n - t_{n-1}|}{t_n} = 0$ nhưng $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|t_n - t_{n-1}|}{t_n}\dfrac{1}{\alpha_n} = 1$.
(c) Từ Định lí 2.1, ta nhận được các hệ quả sau.

Hệ quả 2.1 *Cho $f : C \to C$ là ánh xạ co với hệ số $\tilde{\alpha} \in [0, 1)$, $\mathcal{S}$ là nửa nhóm AXKG xác định trên C thỏa mãn $Fix(\mathcal{S}) \neq \emptyset$. Giả sử $\{x_n\}$ là dãy xác định bởi: $x_1 \in C$,*

$$\begin{cases} y_n = (1 - \alpha_n\mu)x_n + \alpha_n\mu f(x_n), \\ x_{n+1} = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n\dfrac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C y_n ds, \end{cases}$$

trong đó $\mu \in \big(0, 2(1-\tilde{\alpha})/(1+\tilde{\alpha})^2\big)$, các dãy $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ trong $(0, 1)$ thỏa mãn các điều kiện:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$*;*

(2) $0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \beta_n < 1$*;*

(3) $\{t_n\} \subset (0, \infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|t_{n+1} - t_n|}{t_{n+1}} = 0$.

Khi đó dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về p^* với $p^* = P_{Fix(\mathcal{S})}f(p^*)$.

Chứng minh. Đặt $G(x, y) = 0$ với mọi $x, y \in C$ và $r_n = 1$ trong Định lí 2.1, ta nhận được Hệ quả 2.1. □

Hệ quả 2.2 *Cho $f : C \to C$ là ánh xạ co với hệ số $\tilde{\alpha} \in [0, 1)$, song hàm G thỏa mãn (A1)-(A4) và $SEP(G, C) \neq \emptyset$. Giả sử $\{x_n\}$ là dãy xác định bởi:*

$x_1 \in C$,

$$\begin{cases} y_n = (1-\alpha_n\mu)x_n + \alpha_n\mu f(x_n), \\ u_n \in C : G(u_n, y) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - y_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ x_{n+1} = (1-\beta_n)x_n + \beta_n u_n, \end{cases}$$

trong đó $\mu \in \big(0, 2(1-\tilde{\alpha})/(1+\tilde{\alpha})^2\big)$, *các dãy* $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ *trong* $(0,1)$ *và* $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ *thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$*;*

(2) $0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \beta_n < 1$*;*

(3) $0 < c \leq r_n < \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$*;*

Khi đó dãy $\{x_n\}$ *hội tụ mạnh về* p^* *với* $p^* = P_{SEP(G,C)} f(p^*)$.

Chứng minh. Đặt $T(t)x = x$ với mọi $t > 0$ và mọi $x \in C$ trong Định lí 2.1, ta nhận được Hệ quả 2.2. □

2.2. Thử nghiệm số

Trong phần này chúng tôi xét bài toán cân bằng dưới dạng phương trình với toán tử đơn điệu, nửa nhóm AXKG $\mathcal{S}$ là phép quay quanh trục Ox_2 và tập C trùng với không gian $\mathbb{R}^3$.

Bài toán

Trong $\mathbb{R}^3$ cho ma trận đối xứng nửa xác định không âm

$$A = \begin{bmatrix} 3/8 & 7/24 & 1/3 \\ 7/24 & 3/8 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Xét hệ phương trình tuyến tính

$$Ax = b, \tag{2.14}$$

trong đó $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ và $b = (0, 4/27, 2/27)^t$. Dễ thấy hạng của A bằng 2 nên hệ có vô số nghiệm. Đặt

$$G(x,y) = \langle Ax - b, y - x\rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Khi đó tập nghiệm của hệ trùng với tập nghiệm của bài toán cân bằng

$$G(x,y) \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^3. \tag{2.15}$$

Thật vậy, hiển nhiên nếu x^* là nghiệm của hệ thì

$$G(x^*, y) = 0 \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^3.$$

Ngược lại, giả sử x^* là nghiệm của bài toán cân bằng, tức là

$$G(x^*, y) = \langle Ax^* - b, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^3.$$

Lần lượt thay $y = 0$ và $y = 2x^*$ vào hệ thức trên ta được

$$\langle Ax^* - b, x^* \rangle \leq 0 \text{ và } \langle Ax^* - b, x^* \rangle \geq 0,$$

suy ra $\langle Ax^* - b, x^* \rangle = 0$. Hơn nữa, $\langle Ax^* - b, y \rangle \geq \langle Ax^* - b, x^* \rangle = 0 \, \forall y \in \mathbb{R}^3$, do đó nếu chọn $y = b - Ax^*$ thì $\|Ax^* - b\| = 0$, tức là $Ax^* = b$. Do A nửa xác định không âm nên song hàm G thỏa mãn (A1)-(A4) với mọi $x, y \in \mathbb{R}^3$ (xem [32]). Bằng việc giải hệ (2.14) ta được tập nghiệm của bài toán cân bằng (2.15) là

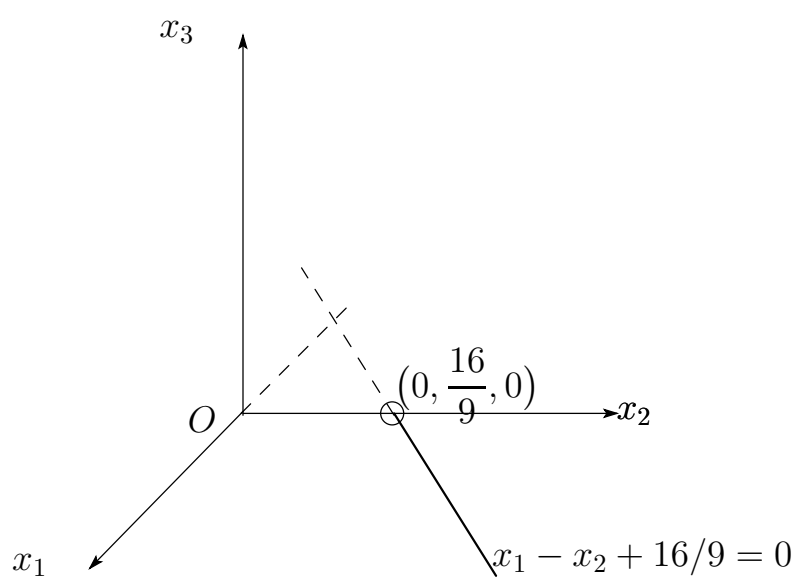
$$\mathrm{SEP}(G, C) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + 16/9 = 0\}.$$

Xét nửa nhóm ánh xạ không giãn $\mathcal{S} = \{T(t) : 0 \leq t < \infty\}$, trong đó

$$T(t) = \begin{bmatrix} \cos \alpha t & 0 & -\sin \alpha t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha t & 0 & \cos \alpha t \end{bmatrix}.$$

Trong không gian 3 chiều $\mathbb{R}^3$ đây chính là phép quay góc αt quanh trục Ox_2, do đó tập điểm bất động của $\mathcal{S}$ là $\mathrm{Fix}(\mathcal{S}) = \cap_{t \geq 0} \mathrm{Fix}(T(t)) = \{(0, x_2, 0)\}$ với mọi $x = (x_1, x_2, x_3)^t$.
Như vậy

$$\mathrm{SEP}(G, C) \cap \mathrm{Fix}(\mathcal{S}) = \left\{ \left(0, \frac{16}{9}, 0\right) \right\}.$$



Để đơn giản tính toán, ta chọn $f(x) = \frac{1}{2}x$, $\mu = \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $t_n = 2n+1$, $\beta_n = 0.5$, $r_n = \frac{1}{300}$ và α_n xác định bởi (2.13) trong Ví dụ 2.1. Khi đó công thức (2.1) trở thành

$$\begin{cases} y_n = (1 - \frac{1}{8}\alpha_n)x_n, \\ \big(A + \frac{1}{r_n}I\big)u_n = \frac{1}{r_n}y_n + b, \\ x_{n+1} = (1-\beta_n)x_n + \beta_n \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n \mathrm{d}s \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} y_n = (1 - \frac{1}{8}\alpha_n)x_n, \\ u_n = \left(A + \frac{1}{r_n}I\right)^{-1}\left(\frac{1}{r_n}y_n + b\right), \\ x_{n+1} = (1-\beta_n)x_n + \beta_n \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u_n \mathrm{d}s. \end{cases} \tag{2.16}$$

trong đó

$$\int_0^{t_n} T(s)\big(A + \frac{1}{r_n}I\big)^{-1}\big(\frac{1}{r_n}x_n + b\big)\mathrm{d}s = \begin{bmatrix} \frac{\sin\alpha t_n}{\alpha} & 0 & -\frac{(1-\cos\alpha t_n)}{\alpha} \\ 0 & t_n & 0 \\ \frac{(1-\cos\alpha t_n)}{\alpha} & 0 & \frac{\sin\alpha t_n}{\alpha} \end{bmatrix} \times \big(A + \frac{1}{r_n}I\big)^{-1}\big(\frac{1}{r_n}x_n + b\big).$$

Kết quả

Điểm xuất phát $x^0 = (4, 5, 6)$. Nghiệm đúng $x^* = (0, 1.7777777777, 0)$.

n	x_1^n	x_2^n	x_3^n
1	3.364512279	4.873793033	5.751141384
2	2.745776746	4.829332286	5.214599255
3	2.417837900	4.755285372	4.648700362
4	2.180554077	4.719771546	4.236104948
...	...	...	...
680	0.0000178276	1.791411836	−0.0000176486
690	0.0000149390	1.777312440	−0.0000150284

Bảng 3.1

KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Trong chương này chúng tôi đã đề xuất một cách tiếp cận khác của phương pháp xấp xỉ mềm xây dựng dãy lặp hội tụ mạnh về nghiệm bài toán cân bằng đồng thời là điểm bất động của nửa nhóm AXKG (Định lí 2.1). Kết quả này đã cải tiến kết quả của Takahashi S. và Takahashi W. [35], kết quả Cianciaruso và các cộng sự [15] khi bớt đi điều kiện (C3) của $\{\alpha_n\}$ và thay các điều kiện (D2), (E2) tương ứng của $\{t_n\}$ và $\{r_n\}$ bằng các điều kiện yếu hơn. Ngoài ra, chúng tôi còn xây dựng một ví dụ số đơn giản nhằm minh họa thêm tính đúng đắn của kết quả đạt được.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

(1) Đề tài đề xuất một cách tiếp cận khác của phương pháp xấp xỉ mềm và chứng minh được sự hội tụ mạnh của dãy lặp. Kết quả này đã cải tiến kết quả trước đó của Takahashi S. và Takahashi W, kết quả của Cianciaruso và các cộng sự khi bớt đi điều kiện của dãy tham số hoặc thay bằng điều kiện yếu hơn.

(2) Đưa ra ví dụ số minh họa cho các kết quả thu được.

Các hướng nghiên cứu tiếp theo

(1) Nghiên cứu áp dụng phương pháp điểm gần kề xấp xỉ (inexact proximal method) vào các kết quả để đảm bảo tính khả thi của thuật toán trong các bài toán thực tế.

(2) Mở rộng kết quả của đề tài tìm nghiệm bài toán cân bằng tổng quát đồng thời là không điểm của toán tử đơn điệu, điểm bất động chung của nửa nhóm ánh xạ không giãn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Đình Dũng (2013), *Xấp xỉ nghiệm cho hệ phương trình toán tử*, Luận án Tiến sĩ Toán học, Viện CNTT - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

[2] Trương Minh Tuyên (2014), *Một số phương pháp tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Banach*, Luận án Tiến sĩ Toán học, Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

Tiếng Anh

[3] Arrow K. J. and Debreu G. (1954), "Existence of an equilibrium for a competitive economy", *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 265–290.

[4] Atsushiba S. and Takahashi W. (1997), "Approximating common fixed points of nonexpansive semigroups by the Mann iteration process", *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska*, 51(2), pp. 1–16.

[5] Bauschke H. H. (1996), "The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 202(1), pp. 150–159.

[6] Bauschke H. H. and Borwein J. M. (1996), "On projection algorithms for solving convex feasibility problems", *SIAM review*, 38(3), pp. 367–426.

[7] Blum E. and Oettli W. (1994), "From optimization and variational inequalities to equilibrium problems", *Mathematics Student-India*, 63(1), pp. 123–145.

[8] Bregman L. (1965), "The method of successive projection for finding a common point of convex sets(Theorems for determining common point of convex sets by method of successive projection)", *Soviet Mathematics*, 6, pp. 688–692.

[9] Brezis H. (1974), "Monotone operators, nonlinear semigroups and applications", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, BC, 1974)*, 2, pp. 249–255.

[10] Browder F. E. (1965a), "Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 53(6), pp. 1272.

[11] Bruck R. E. and Reich S. (1977), "Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces", *Houston J. Math*, 3(4), pp. 459–470.

[12] Buong N. (2006), "Regularization for unconstrained vector optimization of convex functionals in Banach spaces", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 46(3), pp. 354–360.

[13] Buong N. and Lang N. D. (2011b), "Iteration methods for fixed point of a nonexpansive mapping", *Int. Math. Forum*, 6, pp. 2963–2974.

[14] Censor Y. (1988), "Parallel application of block-iterative methods in medical imaging and radiation therapy", *Mathematical Programming*, 42(1-3), pp. 307–325.

[15] Cianciaruso F., Marino G., and Muglia L. (2010), "Iterative methods for equilibrium and fixed point problems for nonexpansive semigroups in Hilbert spaces", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 146(2), pp. 491–509.

[16] Combettes P. (1996), "The convex feasibility problem in image recovery", *Advances in imaging and electron physics*, 95(155-270), pp. 25.

[17] Combettes P. L., Hirstoaga S. A., et al. (2005), "Equilibrium programming in Hilbert spaces", *J. Nonlinear Convex Anal*, 6(1), pp. 117–136.

[18] Genel A. and Lindenstrauss J. (1975), "An example concerning fixed points", *Israel Journal of Mathematics*, 22(1), pp. 81–86.

[19] Goebel K. and Kirk W. A. (1990), *Topics in metric fixed point theory*, 28, Cambridge University Press.

[20] Halpern B. (1967), "Fixed points of nonexpansive maps", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, pp. 957–961.

[21] Krasnosel'skii M. A. (1955), "Two remarks on the method of successive approximations", *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 10(1), pp. 123–127.

[22] Lions P.-L. (1977), "Approximation de points fixes de contractions", *CR Acad. Sci. Paris Ser. AB*, 284(21), pp. 1357–1359.

[23] Mann W. R. (1953), "Mean value methods in iteration", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4(3), pp. 506–510.

[24] Martinet B. (1970), "Brève communication. Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives", *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 4(R3), pp. 154–158.

[25] Mastroeni G. (2003a), "Gap functions for equilibrium problems", *Journal of Global Optimization*, 27(4), pp. 411–426.

[26] Mastroeni G. (2003b), "On auxiliary principle for equilibrium problems", *Equilibrium problems and variational models*, pp. 289–298, Springer.

[27] Moudafi A. (1999), "Proximal point algorithm extended to equilibrium problems", *Journal of Natural Geometry*, 15(1-2), pp. 91–100.

[28] Moudafi A. (2000), "Viscosity approximation methods for fixed-points problems", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 241(1), pp. 46–55.

[29] Nakajo K. and Takahashi W. (2003), "Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 279(2), pp. 372–379.

[30] Opial Z. (1967), "Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73(4), pp. 591–597.

[31] Plubtieng S. and Punpaeng R. (2008), "Fixed point solutions of variational inequalities for nonexpansive semigroups in Hilbert spaces", *Mathematical and Computer modelling*, 48(1-2), pp. 279–286.

[32] Quoc Tran D., Le Dung M., and Nguyen V. H. (2008), "Extragradient algorithms extended to equilibrium problems", *Optimization*, 57(6), pp. 749–776.

[33] Rockafellar R. T. (1976), "Monotone operators and the proximal point algorithm", *SIAM journal on control and optimization*, 14(5), pp. 877–898.

[34] Shimizu T. and Takahashi W. (1997), "Strong convergence to common fixed points of nonexpansive mappings", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 211(1), pp. 71–83.

[35] Takahashi S. and Takahashi W. (2007), "Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 331(1), pp. 506–515.

[36] Takahashi W. and Toyoda M. (2003), "Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 118(2), pp. 417–428.

[37] Takahashi W., Wong N.-C., and Yao J.-C. (2012), "Iterative common solutions for monotone inclusion problems, fixed point problems and equilibrium problems", *Fixed Point Theory and Applications*, 2012(1), pp. 1–19.

[38] Von Neumann J. (1949), "On rings of operators. Reduction theory", *Annals of Mathematics*, pp. 401–485.

[39] Wittmann R. (1992), "Approximation of fixed points of nonexpansive mappings", *Archiv der Mathematik*, 58(5), pp. 486–491.

[40] Xu H.-K. (2004), "Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 298(1), pp. 279–291.

[41] Yamada Y. (2001), "The hybrid steepest-descent method for variational inequalities problems over the intersection of the fixed point sets of nonexpansive mappings", *Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and Their Applications*, pp. 473–504.

[42] Zarantonello E. H. (1971), *Projections on convex sets in Hilbert space and spectral theory*, University of Wisconsin.