

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{F}}_e = & \overline{\mathbf{C}}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_a + \overline{\mathbf{C}}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_u + \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) + \widehat{\mathbf{M}}_{12}(\mathbf{q})\widehat{\mathbf{M}}_{22}^{-1}(\mathbf{q})\widehat{\mathbf{F}}_{er2} - \widehat{\mathbf{F}}_{er1} \\ & - \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\{2\lambda\dot{\mathbf{q}}_a + \lambda^T\lambda(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_{ad})\} - \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q})(\mathbf{K}_p\mathbf{q}_u + \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}}_u) \end{aligned} \quad (15)$$

với  $\mathbf{K}_p = \text{diag}(K_{p1}, K_{p2})$  và  $\mathbf{K}_d = \text{diag}(K_{d1}, K_{d2})$  là các ma trận hệ số điều khiển, được xác định bằng phương pháp thử đúng dần (Trial and error), đây là những ma trận đường chéo dương. Bộ điều khiển hồi tiếp phi tuyến (15) gồm ba thành phần, mỗi thành phần có một nhiệm vụ cụ thể: Thành phần  $\overline{\mathbf{C}}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_a + \overline{\mathbf{C}}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_u + \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$  dùng để khử chuyển động tự do. Thành phần  $(\widehat{\mathbf{M}}_{12}(\mathbf{q})\widehat{\mathbf{M}}_{22}^{-1}(\mathbf{q})\widehat{\mathbf{F}}_{er2} - \widehat{\mathbf{F}}_{er1})$  dùng để khử kích thích điều hòa của sóng biển. Sau cùng, các thành phần  $\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\{2\lambda\dot{\mathbf{q}}_a + \lambda^T\lambda(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_{ad})\}$  và  $\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q})(\mathbf{K}_p\mathbf{q}_u + \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}}_u)$  lần lượt dùng để ổn định các trạng thái  $\mathbf{q}_a$  và  $\mathbf{q}_u$  của hệ.

### 5. Kết luận

Chúng tôi đã xây dựng một mô hình toán mới cho cần trục container gắn trên tàu có kể đến sự đàn hồi của cáp thép, sự đàn nhớt của nước biển, và kích thích của sóng. Chúng tôi cũng đã thiết kế thành công một luật điều khiển dựa trên hồi tiếp tuyến tính hóa và vi phân – tỉ lệ. Kết quả mô phỏng số để kiểm chứng chất lượng của bộ điều khiển này đồng thời thiết kế thêm một bộ điều khiển khác sẽ được trình bày trong bài báo tiếp theo.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] S. Messineo and A. Serrani, "Offshore crane control based on adaptive external models," *Automatica*, vol. 45, no. 11, pp. 2546-2556, 2009.
- [2] T. Erneux and T. K. Nagy, "Nonlinear stability of a delayed feedback controlled container crane," *Journal of Vibration and Control*, vol. 13, no. 5, pp. 603-616, 2007.
- [3] Z. N. Masoud and A. H. Nayfeh, "Sway reduction on container cranes using delayed feedback controller," *Nonlinear Dynamics*, vol. 34, no. 3-4, pp.347-358, 2003.
- [4] Z. N. Masoud, A. H. Nayfeh, and D. T. Mook, "Cargo pendulation reduction of ship-mounted cranes," *Nonlinear Dynamics*, vol. 35, no. 3, pp. 299-311, 2004.
- [5] Tuan LA, Cuong HM, Lee SG, Nho LC, and Moon K. Nonlinear feedback control of container crane mounted on elastic foundation with flexibility of suspended cable. *Journal of Vibration and Control*, Published online before print on November 24, 2014, DOI: 10.1177/1077546314558499.

*Người phản biện: TS. Nguyễn Mạnh Thường; TS. Cao Đức Thiệp*

**TÍNH TOÁN DAO ĐỘNG XOẮN TỰ DO  
CỦA THANH THÀNH MỎNG TỰA TRÊN CÁC GỐI CỨNG  
BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHÓNG LIÊN KẾT TRUNG GIAN  
CALCULATING THE FREE TORSIONAL VIBRATION  
OF CONTINUOUS BEAMS WITH THIN-WALLED CROSS-SECTION  
BY INTERMEDIATE SUPPORT RELEASE METHOD**

**TS. TRẦN NGỌC AN, ThS. LÊ TÙNG ANH**  
*Khoa Công trình, Trường ĐHHH Việt Nam*

**Tóm tắt**

*Dao động xoắn có vai trò quan trọng như dao động uốn trong tính toán cầu treo dây văng và dây võng. Trong bài báo này, các tác giả trình bày phương pháp giải phóng liên kết trung gian để tính toán dao động xoắn tự do của thanh thành mỏng tựa trên các gối cứng.*

**Abstract**

*Torsional vibration plays an important role as bending vibration in calculating the cable-stayed bridges and suspension bridges. In this paper, the authors present the*

*intermediate support release method to calculate the free torsional vibration of continuous beams with thin-walled cross-section.*

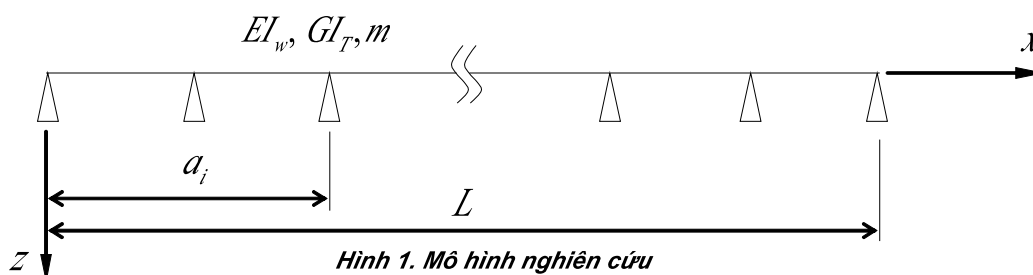
**Key words:** torsional vibration, continuous beam, intermediate support.

## 1. Đặt vấn đề

Phương pháp giải phóng liên kết trung gian, do GS.TSKH Nguyễn Văn Khang đưa ra [2], đã được nhóm nghiên cứu tại trường Đại học Bách Khoa Hà Nội tiến hành tính toán dao động uốn tự do và dao động uốn cưỡng bức dưới tác dụng của đoàn tải trọng di động của dầm liên tục trên các gối cứng và gối đàn hồi trung gian [3, 4, 5, 6, 7]. Sau đây, các tác giả trình bày việc sử dụng phương pháp giải phóng liên kết trung gian để tính toán dao động xoắn tự do của thanh thành mỏng có thiết diện không đối xứng trên các gối cứng. Sau đó, áp dụng tính toán cho một ví dụ cụ thể. Tính toán dao động uốn tự do và dao động xoắn tự do của thanh thành mỏng có ý nghĩa quan trọng khi xây dựng mô hình mặt cắt 2D trong thí nghiệm hầm gió của cầu nhịp lớn.

## 2. Mô hình tính toán và phương trình dao động xoắn

Xét mô hình thanh thành mỏng, thiết diện không đối, chiều dài  $L$ , tựa trên  $N^{(g)}$  gối cứng (hình 1). Thanh có độ cứng chống cong vênh  $EI_w$ , độ cứng chống xoắn  $GI_T$ , khối lượng trên một đơn vị dài  $m$ .



Hình 1. Mô hình nghiên cứu

Xét mặt cắt thanh thỏa mãn một trong hai giả thiết:

- + Mặt cắt thanh có hai trục đối xứng.
- + Mặt cắt thanh có một trục đối xứng theo phương thẳng đứng và bỏ qua dao động uốn theo phương ngang.

Thành phần momen xoắn  $m_x$  tác dụng lên phân tố thanh  $dx$  bao gồm:

+ Momen quán tính  $-(\rho_b I_p + m e^2) \partial^2 \varphi / \partial t^2$

+ Phản lực gối đỡ cứng  $-\sum_{i=1}^{N^{(g)}} M_i^{(g)} \delta(x - a_i) dx$

$e$ : Khoảng cách giữa khối tâm và tâm uốn,  $\rho_b$ : Khối lượng riêng của thanh,  $I_p$ : Momen quán tính cực của mặt cắt ngang lấy với trọng tâm của nó,  $a_i$ : Vị trí gối đỡ thứ  $i$ ,  $M_i^{(g)}$ : Phản lực tại gối đỡ thứ  $i$ .

Như vậy, ta có phương trình dao động xoắn tự do của thanh thành mỏng tựa trên các gối cứng [1]:

$$EI_w \partial^4 \varphi / \partial x^4 - GI_T \partial^2 \varphi / \partial x^2 + (\rho_b I_p + m e^2) \partial^2 \varphi / \partial t^2 = -\sum_{i=1}^{N^{(g)}} M_i^{(g)} \delta(x - a_i) \quad (1)$$

Trong đó  $\delta(x - \psi)$  là hàm Delta-Dirac. Hàm này có tính chất:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - \psi) dx = f(\psi)$$

Điều kiện hình học tại các gối cứng:

$$\varphi(a_r, t) = 0, \quad (i = \overline{1, N^{(s)}}) \quad (2)$$

Các điều kiện biên [1]:

$$x=0: \varphi(0, t) = 0 = \partial^2 \varphi / \partial x^2 (0, t); \quad x=L: \varphi(L, t) = 0 = \partial^2 \varphi / \partial x^2 (L, t) \quad (3)$$

### 3. Biến đổi hệ phương trình đạo hàm riêng - đại số về hệ phương trình vi phân thường

Áp dụng phương trình Ritz suy rộng và chú ý các điều kiện biên (3), nghiệm của hệ phương trình đạo hàm riêng (1) được tìm dưới dạng:

$$\varphi(x, t) = \sum_{r=1}^n \alpha_r(t) \sin\left(\frac{r\pi}{L} x\right) \quad (4)$$

Thế (4) vào (1), ta nhận được phương trình:

$$EI_w \sum_{r=1}^n \left(\frac{r\pi}{L}\right)^4 \alpha_r(t) \sin\left(\frac{r\pi}{L} x\right) + GI_T \sum_{r=1}^n \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 \alpha_r(t) \sin\left(\frac{r\pi}{L} x\right) + (\rho_b I_\rho + m e^2) \sum_{r=1}^n \ddot{\alpha}_r(t) \sin\left(\frac{r\pi}{L} x\right) = - \sum_{i=1}^{N^{(s)}} M_i^{(s)} \delta(x - a_i) \quad (5)$$

Để đơn giản, đặt  $I = \rho_b I_\rho + m e^2$ , suy ra:

$$EI_w \sum_{r=1}^n \left(\frac{r\pi}{L}\right)^4 \alpha_r(t) \sin\left(\frac{r\pi}{L} x\right) + GI_T \sum_{r=1}^n \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 \alpha_r(t) \sin\left(\frac{r\pi}{L} x\right) + I \sum_{r=1}^n \ddot{\alpha}_r(t) \sin\left(\frac{r\pi}{L} x\right) = - \sum_{i=1}^{N^{(s)}} M_i^{(s)} \delta(x - a_i) \quad (6)$$

Nhân hai vế phương trình trên với  $\sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right)$  rồi tích phân hai vế theo  $x$  từ  $0 \rightarrow L$ , phương trình (6) khi đó có dạng:

$$I \ddot{\alpha}_s(t) + \left[ EI_w \left(\frac{s\pi}{L}\right)^4 + GI_T \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 \right] \alpha_s(t) = - \frac{2}{L} \int_0^L \sum_{i=1}^{N^{(s)}} M_i^{(s)} \delta(x - a_i) \sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx \quad (s = \overline{1, n}) \quad (7)$$

Xét tích phân ở vế phải của phương trình (7), chú ý hàm Delta-Dirac, ta có:

$$\int_0^L \sum_{i=1}^{N^{(s)}} M_i^{(s)} \delta(x - a_i) \sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx = \sum_{i=1}^{N^{(s)}} M_i^{(s)} \sin\left(\frac{s\pi a_i}{L}\right) \quad (8)$$

Thay (8) vào (7) ta được phương trình vi phân thường:

$$I \ddot{\alpha}_s(t) + \left[ EI_w \left(\frac{s\pi}{L}\right)^4 + GI_T \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 \right] \alpha_s(t) = - \frac{2}{L} \sum_{i=1}^{N^{(s)}} M_i^{(s)} \sin\left(\frac{s\pi a_i}{L}\right) \quad (s = \overline{1, n}) \quad (9)$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu:

$$\delta_r^s = \begin{cases} 0 & \text{khi } r = s \\ 1 & \text{khi } r \neq s \end{cases}$$

Khi đó, phương trình (9) sẽ có dạng:

$$\ddot{\alpha}_s = - \sum_{r=1}^n \delta_r^s \left[ \frac{EI_w}{I} \left(\frac{s\pi}{L}\right)^4 + \frac{GI_T}{I} \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 \right] \alpha_r(t) - \frac{2}{LI} \sum_{i=1}^{N^{(s)}} M_i^{(s)} \sin\left(\frac{s\pi a_i}{L}\right) \quad (s = \overline{1, n}) \quad (10)$$

Để xác định phản lực liên kết tại các gối cứng trung gian, ta viết phương trình (10) dưới dạng ma trận, đặt:

$$\mathbf{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n]^T; \quad \mathbf{M} = [M_1^{(s)}(t) \quad M_2^{(s)}(t) \quad \dots \quad M_{N^{(s)}}^{(s)}(t)]^T$$

$$\mathbf{V} = [v_{sr}]: v_{sr} = -\delta_r^s \left[ \frac{EI_w}{I} \left( \frac{s\pi}{L} \right)^4 + \frac{GI_r}{I} \left( \frac{s\pi}{L} \right)^2 \right] \quad (s = \overline{1, n}, r = \overline{1, n})$$

$$\mathbf{S}_1 = [s_{si}^{(1)}]: s_{si}^{(1)} = \sin \frac{s\pi a_i}{L} \quad (s = \overline{1, n}, i = \overline{1, N^{(s)}})$$

Phương trình (10) có dạng:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{V}\mathbf{a} - \frac{2}{LI} \mathbf{S}_1 \mathbf{M} \quad (11)$$

suy ra

$$\mathbf{S}_1 \mathbf{M} = \frac{LI}{2} [-\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{V}\mathbf{a}] \quad (12)$$

Do ma trận  $\mathbf{S}_1$  là ma trận chữ nhật cỡ  $(n \times N^{(s)})$  nên tích  $\mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_1$  là ma trận vuông cấp  $N^{(s)}$ .

Nhân hai vế phương trình (12) với ma trận  $\mathbf{S}_1^T$  ta được:

$$\mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_1 \mathbf{M} = \frac{LI}{2} \mathbf{S}_1^T [-\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{V}\mathbf{a}] \quad (13)$$

Đặt  $\mathbf{A} = \mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_1$  và chú ý rằng, từ điều kiện liên kết  $\varphi(a_r, t) = \sum_{r=1}^n \alpha_r(t) \sin \frac{r\pi a_i}{L} = 0$ , hay

$\sum_{r=1}^n \ddot{\alpha}_r(t) \sin \frac{r\pi a_i}{L} = 0$ , suy ra  $\mathbf{S}_1^T \ddot{\mathbf{u}} = 0$ , từ đó ta có biểu thức xác định phản lực liên kết tại các gối cứng trung gian:

$$\mathbf{M} = \frac{LI}{2} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{S}_1^T \mathbf{V}\mathbf{a} \quad (14)$$

Thế biểu thức (14) vào (11) ta được:

$$\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{S}_1 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{S}_1^T - \mathbf{I}] \mathbf{V}\mathbf{a} = 0 \quad (15)$$

trong đó  $\mathbf{I}$  là ma trận đơn vị cấp  $n$ . Nếu ta ký hiệu  $\mathbf{C} = [\mathbf{S}_1 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{S}_1^T - \mathbf{I}] \mathbf{V}$  thì ta nhận được hệ phương trình vi phân thường mô tả dao động xoắn tự do của thanh thành mỏng tựa trên các gối cứng:

$$\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\mathbf{a} = 0 \quad (16)$$

hay

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{I}) \mathbf{a}_0 = 0 \quad (17)$$

Khi đó phương trình đặc trưng có dạng:

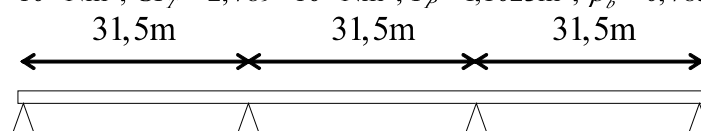
$$|\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{I}| = 0 \quad (18)$$

Giải phương trình đặc trưng tìm các tần số riêng  $\omega$ , thay vào phương trình (17) tìm các vector riêng  $\mathbf{a}_0$ .

#### 4. Ví dụ áp dụng

Xét ví dụ tính toán của Y. Matsui và T. Hayashikawa [8] theo phương pháp ma trận độ cứng động lực, các thông số của thanh thành mỏng như sau:

$$EI_w = 1,336 \times 10^{10} \text{ Nm}^4; \quad GI_r = 2,789 \times 10^{10} \text{ Nm}^2; \quad I_p = 1,1023 \text{ m}^4; \quad \rho_b = 0,7852 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$$



Hình 2. Mô hình thanh thành mỏng tựa trên các gối cứng [8]

Bảng 1. So sánh kết quả tính toán lý thuyết và kết quả theo tài liệu tham khảo [8]

Tần số (Hz)	Tính toán lý thuyết	Tài liệu tham khảo	Sai số (%)	Tần số (Hz)	Tính toán lý thuyết	Tài liệu tham khảo	Sai số (%)
$f_1$	28,561	28,598	-0,129	$f_6$	60,142	59,687	+0,762
$f_2$	28,978	28,935	+0,149	$f_7$	87,293	87,412	-0,136
$f_3$	29,851	29,632	+0,739	$f_8$	88,611	88,452	+0,180
$f_4$	57,527	57,603	-0,132	$f_9$	91,326	90,578	+0,826
$f_5$	58,380	58,284	+0,165	$f_{10}$	118,237	118,411	-0,147

## 5. Kết luận

Phương pháp giải phóng liên kết trung gian đã được nhóm nghiên cứu tại trường Đại học Bách khoa Hà Nội sử dụng để tính toán dao động uốn tự do và dao động uốn cưỡng bức của dầm liên tục tựa trên các gối cứng và gối đàn hồi trung gian. Sự so sánh ưu, nhược điểm của phương pháp giải phóng liên kết trung gian so với các phương pháp khác (phương pháp ma trận độ cứng động lực, phương pháp 3 mô men, phương pháp chuyển vị, phương pháp ma trận truyền và phương pháp phần tử hữu hạn) được trình bày chi tiết trong các tài liệu [6, 7]. Trong nội dung bài báo này, các tác giả tiếp tục mở rộng phương pháp giải phóng liên kết trung gian để tính toán dao động xoắn tự do của thanh thành mỏng, thiết diện không đổi, tựa trên các gối cứng, sau đó tính toán cho một ví dụ cụ thể [8]. Các kết quả lý thuyết thu được phù hợp tốt với kết quả tính toán bằng phương pháp ma trận độ cứng động lực trong tài liệu tham khảo [8]. Những vấn đề trình bày trong bài báo có thể áp dụng mở rộng tính toán dao động uốn - xoắn tự do của dầm chủ cầu treo dây văng và dây võng (có xét đến ảnh hưởng của hệ dây treo), từ đó làm cơ sở để tính toán dao động uốn - xoắn dưới tác dụng của gió.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Trần Ngọc An, Nguyễn Văn Khang, *Tính toán dao động uốn xoắn tự do của dầm khi mặt cắt có một trục đối xứng và chú ý đến hiệu ứng cong vênh*. Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ IX (tập 1), pp. 69-78, Hà Nội, 2012.
- [2] Nguyễn Văn Khang, Nguyễn Minh Phương, *Tính toán dao động uốn của dầm liên tục bằng phương pháp giải phóng liên kết*. Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ VII (tập 1), pp. 212-219, Hà Nội, 2002.
- [3] N. V. Khang, N. M. Phuong, *Transverse vibrations of continuous beam on intermediate hard and elastic supports under action of moving bodies*. Technische Mechanik Magdeburg, 2002.
- [4] N. V. Khang, H. Ha, N. M. Phuong, *Calculating transverse vibration of beam bridges under action of some moving bodies in Vietnam*. Proceedings of the National Conference on Engineering Mechanics and Automation, Bach Khoa Publishing House, Hanoi, pp. 157-171, 2006.
- [5] N. V. Khang, N. P. Dien, N. T. V. Huong, *Transverse vibration of prestressed continuous beams on rigid supports under the action of moving bodies*. Archive of Applied Mechanics, Springer, 2008.
- [6] Nguyễn Minh Phương, *Tính toán dao động uốn của dầm liên tục trên các gối cứng và gối đàn hồi bằng phương pháp giải phóng các liên kết trung gian*. Luận văn Thạc sỹ, Đại học Bách khoa Hà Nội, 2002.
- [7] Nguyễn Minh Phương, *Tính toán dao động uốn của dầm liên tục và tầm trục hướng hình chữ nhật chịu tác dụng của nhiều vật thể di động*. Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Bách khoa Hà Nội, 2009.
- [8] Y. Matsui, T. Hayashikawa, *Dynamic stiffness analysis for torsional vibration of continuous beams with thin-walled cross-section*. Journal of Sound and Vibration, 243(2), pp. 301-316, 2001.

Người phản biện: TS. Trần Khánh Toàn; TS. Hoàng Mạnh Cường