3. Kết luận

Bài báo đã tập trung phân tích, đánh giá và lựa chọn một số chỉ tiêu cơ bản và quan trọng, gồm: Dự báo khối lượng gạo xuất khẩu của Việt Nam; thị trường xuất khẩu gạo của Việt Nam, quốc gia nhập khẩu gạo của Việt Nam, tuyến luồng đường thủy nội địa để vận tải gạo xuất khẩu tại đồng bằng sông Cửu Long, phương tiện vận tải gạo xuất khẩu tại đồng bằng sông Cửu Long, cảng xếp dỡ hàng gạo xuất khẩu tại đồng bằng sông Cửu Long và cước phí vận tải hàng gạo xuất khẩu của Việt Nam. Trên cơ sở các tiêu chí này, tác giả xây dựng tối ưu hệ thống vận tải gạo xuất khẩu của Việt Nam giai đoạn 2020 - 2030, cụ thể theo hình 6.

Hình 6. Xây dựng hệ thống vận tải gạo xuất khẩu tối ưu của Việt Nam giai đoạn 2020 - 2030

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Viện Chính sách và Chiến lược phát triển nông nghiệp nông thôn (IPSARD), năm 2015.
[2]. Báo cáo thường niên hàng lúa gạo Việt Nam năm 2015 và triển vọng năm 2016.
[3]. Báo cáo và số liệu của Tổ chức Nông lương thế giới (FAO), năm 2015.
[4]. Báo cáo và số liệu của Bộ Nông nghiệp Hoa Kỳ (USDA), năm 2015.
[5]. Báo cáo và số liệu của Tổng cục Thống kê, năm 2015.
[6]. Báo cáo và số liệu của Tổng cục Hải quan, năm 2015.
[7]. Báo cáo và số liệu của Cục đường thủy nội địa, năm 2015.
[8]. Báo cáo và số liệu của Cục Hàng hải Việt Nam, năm 2015.
[9]. Quyết định 1037/QĐ-TTg, ngày 24/6/2014 của Thủ tướng Chính phủ phê duyệt điều chỉnh "*Quy hoạch phát triển hệ thống cảng biển Việt Nam đến năm 2020, định hướng đến năm 2030*".

Ngày nhận bài: 01/3/2016
Ngày phản biện: 11/3/2016
Ngày duyệt đăng: 15/3/2016

VỀ MỘT LỚP CÁC PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN CÓ NGHIỆM HỘI TỤ
ON A CLASS OF DIFFERENCE EQUATIONS WITH CONVERGENT SOLUTIONS

HOÀNG VĂN HÙNG
Khoa Cơ sở Cơ bản, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

Tóm tắt

Xét phương trình sai phân cấp k dạng $f(x_{n+k}, x_n) = r(n)$*, trong đó* $\{r(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *là một dãy đã cho hội tụ tới giới hạn* M *và* $f(x, y)$ *là một hàm hai biến với các tính chất sau:*

1. f *được xác định trên miền D =* $(a,+\infty)\times(a,+\infty)$*, trong đó* a *là một số thực hoặc* $-\infty$*;*

2. Tồn tại một hàm hai biến liên tục $g(x, y)$ *xác định trên toàn mặt phẳng* ***R²*** *thỏa mãn các điều kiện sau:*

i. $g(x, y) \le g(x', y')$ *khi* $a < x \le x'$ *và* $a < y \le y'$*;*

ii. $g(y, f(x, y)) = x$ *với mọi* $x, y \in (a,+\infty)$*;*

iii. $x \le g(x,A) \Leftrightarrow x \le A$ *và* $x \ge g(x,A) \Leftrightarrow x \ge A$ *với* $x, A \in [a,+\infty)$ *nếu* a *là số thực. Nếu* $a = -\infty$ *thì các quan hệ tương đương đó đúng khi* $x, A \in (-\infty,+\infty)$.

Khi đó các nghiệm (nếu tồn tại) của phương trình sai phân $f(x_{n+k}, x_n) = r(n)$ *đều hội tụ về giới hạn* M *của dãy* $\{r(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *nếu* $M \ge a$.

Abstract

Consider a k-order difference equation of the form $f(x_{n+k}, x_n) = r(n)$, *where* $\{r(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *is a given sequence converging to* M *and* $f(x,y)$ *is a function of two variables with the following properties:*

1. f *is defined over a domain D =* $(a,+\infty)\times(a,+\infty)$, *where* a *is a real number or* $-\infty$;

2. There is a continuous function of two variables $g(x,y)$ *defined over* ***R²*** *which satisfies the following conditions:*

i. $g(x,y) \le g(x',y')$ *if* $a < x \le x'$ *and* $a < y \le y'$;

ii. $g(y, f(x,y)) = x$ *for every* $x, y \in (a,+\infty)$;

iii. $x \le g(x,A) \Leftrightarrow x \le A$ *and* $x \ge g(x,A) \Leftrightarrow x \ge A$ *for* $x, A \in [a,+\infty)$ *if* a *is a real number. If* $a = -\infty$ *then these logical relationships hold for* $x, A \in (-\infty,+\infty)$.

Then the solutions (if they exist) of the difference equation $f(x_{n+k}, x_n) = r(n)$ *converge to the limit* M *of the sequence* $\{r(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *provided* $M \ge a$.

Từ khóa: *Phương trình sai phân cấp k, nghiệm của phương trình sai phân, dãy hội tụ.*

1. Đặt vấn đề: Phương trình sai phân xuất hiện khi cần giải quyết những vấn đề liên quan đến các quá trình rời rạc được biểu diễn dưới dạng các dãy, trong số đó có cả các bài toán kinh tế. Sự hội tụ của nghiệm của các phương trình sai phân khi biến n dần tới vô cực được quan tâm khi cần xét xu hướng tiệm cận của các quá trình được mô tả bởi phương trình sai phân đó. Bài báo này xét một lớp các phương trình sai phân cấp k mà nghiệm của nó (nếu có) chắc chắn hội tụ.

2. Kết quả chính Tác giả đã chứng minh định lý sau:

2.1.Định lý: *Xét phương trình sai phân cấp k dạng* $f(x_{n+k}, x_n) = r(n)$, *trong đó* $\{r(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *là một dãy đã cho hội tụ tới giới hạn* M *và* $f(x,y)$ *là một hàm hai biến với các tính chất sau:*

1. f *được xác định trên miền D =* $(a,+\infty)\times(a,+\infty)$, *trong đó* a *là một số thực hoặc* $-\infty$;

2. Tồn tại một hàm hai biến liên tục $g(x,y)$ *xác định trên toàn mặt phẳng* ***R²*** *thỏa mãn các điều kiện sau:*

i. $g(x,y) \le g(x',y')$ *khi* $a < x \le x'$ *và* $a < y \le y'$;

ii. $g(y, f(x,y)) = x$ *với mọi* $x, y \in (a,+\infty)$;

iii. $x \le g(x,A) \Leftrightarrow x \le A$ *và* $x \ge g(x,A) \Leftrightarrow x \ge A$ *với* $x, A \in [a,+\infty)$ *nếu* a *là số thực. Nếu* $a = -\infty$ *thì các quan hệ tương đương đó đúng khi* $x, A \in (-\infty,+\infty)$.

Khi đó các nghiệm (nếu tồn tại) của phương trình sai phân $f(x_{n+k}, x_n) = r(n)$ *đều hội tụ về giới hạn* M *của dãy* $\{r(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *nếu* $M \ge a$.

Chứng minh.

Trước hết ta chứng minh rằng nếu các dãy bị chặn $\{x_n\}, \{y_n\}$ thỏa mãn:

$$\limsup x_n = \bar{x},\ \liminf x_n = \underline{x},\ \limsup y_n = \bar{y},\ \liminf y_n = \underline{y}$$

thì

$$\limsup g(x_n, y_n) \le g(\bar{x}, \bar{y}),\ \liminf g(x_n, y_n) \ge g(\underline{x}, \underline{y})$$

Thực vậy, vì các dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ bị chặn ta suy ra các số $\bar{x}, \underline{x}, \bar{y}, \underline{y}$ hữu hạn.

Từ định nghĩa của limsup và liminf ta suy ra rằng với số $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho khi n > n_0 ta sẽ có các bất đẳng thức:

$\underline{x} - \varepsilon < x_n < \overline{x} + \varepsilon, \quad \underline{y} - \varepsilon < y_n < \overline{y} + \varepsilon$

Từ điều kiện i đối với hàm g ta nhận được các bất đẳng thức sau khi n > n_0:

$g(\underline{x} - \varepsilon, \underline{y} - \varepsilon) \le g(x_n, y_n) \le g(\overline{x} + \varepsilon, \overline{y} + \varepsilon)$

Suy ra:

$g(\underline{x} - \varepsilon, \underline{y} - \varepsilon) \le \liminf g(x_n, y_n)$

$\le \limsup g(x_n, y_n) \le g(\overline{x} + \varepsilon, \overline{y} + \varepsilon)$ (1)

Vì $\varepsilon > 0$ tùy ý và g liên tục trên $\mathbf{R}^2$, cho ε dần tới 0 trong dãy bất đẳng thức (1) ta suy ra:

$g(\underline{x}, \underline{y}) \le \liminf g(x_n, y_n)$

$\le \limsup g(x_n, y_n) \le g(\overline{x}, \overline{y})$.

Giả sử phương trình $f(x_{n+k}, x_n) = r(n)$ được xác định với n $\in$ **N** (**N** ký hiệu tập các số nguyên dương), có nghiệm là dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\lim_{n\to\infty} r(n) = M \in [a, +\infty)$.

Vì dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là nghiệm của phương trình $f(x_{n+k}, x_n) = r(n)$ nên ta phải có $a < x_n$ với mọi số nguyên dương n. Tồn tại số dương $A > a$ sao cho $\max\{|x_i| : i = 1,2,.., k\} < A$ và với mọi n $\in$ **N** ta có:

$-A < f(x_{n+k}, x_n) = r(n) < A$

$= g(x_n, r(n)) \le g(A, A) = A$ (2)

Từ điều kiện iii đối với hàm g ta suy ra với $A \ge a$ ta có $g(A, A) = A$. Giả sử đã có $a < x_n \le A$. Dùng các điều kiện i, ii đối với hàm g ta có:

$a < x_{n+k} = g(x_n, f(x_{n+k}, x_n))$ (3)

Vì $\max\{|x_i| : i = 1,2,.., k\} < A$

nên theo nguyên lý quy nạp ta suy ra $a < x_n \le A$ với mọi số nguyên dương n. Vậy dãy $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ bị chặn trên bởi số A. Nếu a là số thực thì rõ ràng dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cũng bị chặn dưới bởi a và do đó dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn.

Xét trường hợp $a = -\infty$.

Giả sử đã có $-A \le x_n \le A$.

Khi đó các điều kiện i, ii đối với hàm g và bất đẳng thức (2) cho ta:

$-A = g(-A, -A) \le x_{n+k} = g(x_n, f(x_{n+k}, x_n))$

$= g(x_n, r(n)) \le g(A, A) = A$.

Lại vì $\max\{|x_i| : i = 1,2,.., k\} < A$, theo nguyên lý quy nạp ta suy ra $-A \le x_n \le A$ với mọi số nguyên dương n. Như vậy, trong mọi trường hợp, với các giả thiết đã nêu trong định lý 2.1, mọi nghiệm $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ của phương trình $f(x_{n+k}, x_n) = r(n)$ đều bị chặn. Do đó các giới hạn trên và dưới của dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ đều hữu hạn, đồng thời:

$a \le \underline{x} = \liminf x_n \le \overline{x} = \limsup x_n \le A$

Lấy limsup hai vế đẳng thức:

$x_{n+k} = g(x_n, f(x_{n+k}, x_n)) = g(x_n, r(n))$

và dùng điều kiện iii cùng các khẳng định đã chứng minh đối với hàm g ta có:

$\overline{x} \le g(\overline{x}, M) \Leftrightarrow \overline{x} \le M$ (4)

Lấy liminf hai vế đẳng thức:

$x_{n+k} = g(x_n, f(x_{n+k}, x_n)) = g(x_n, r(n))$

và lại dùng điều kiện iii cùng các khẳng định đã chứng minh đối với hàm g ta có:

$\underline{x} \ge g(\underline{x}, M) \Leftrightarrow \underline{x} \ge M$ (5).

Từ (4), (5) ta suy ra $M \le \underline{x} = \liminf x_n \le \limsup x_n = \overline{x} \le M$. Vậy dãy $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ và $\lim_{n\to\infty} x_n = M = \lim_{n\to\infty} r(n)$.

Định lý được chứng minh hoàn toàn.

Nhận xét: Nếu a là số thực và $M = a$ thì điều kiện iii đối với hàm g có thể giảm nhẹ, chỉ cần đòi hỏi $g(A, A) = A$ và $x \le g(x, A) \Leftrightarrow x \le A$ với $x, A \in [a, +\infty)$. Thực vậy, trong trường hợp này hiển nhiên ta có $\underline{x} = \liminf x_n \ge a = M$. Như thấy rõ từ chứng minh của định lý 2.1, điều kiện $x \le g(x, A) \Leftrightarrow x \le A$ với $x, A \in [a, +\infty)$ cùng với các giả thiết khác đặt lên hàm g kéo theo $\overline{x} = \limsup x_n \le M = a$. Từ đó ta suy ra khẳng định của định lý.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng nếu dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn $\lim_{n\to\infty}(2x_{n+1} - x_n) = \ell \in \mathbf{R}$ thì dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$. (Xem ([1], Problem 1.2.21)).

Giải. Đặt $r(n)=2x_{n+1}-x_n$, dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là nghiệm của phương trình sai phân:

$2x_{n+1}-x_n=r(n)$ (6),

trong đó $\lim_{n\to\infty} r(n)=\ell$.

Đặt $f(x,y)=2x-y$, hàm $f(x,y)$ được xác định trên tập D=**R**²= $(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ và phương trình (6) có dạng $f(x_{n+1},x_n)=r(n)$

Nếu $g(x,y)=\dfrac{x+y}{2}$ thì g liên tục trên **R²**.

Ta kiểm tra các điều kiện i, ii, iii đối với hàm g trong định lý 2.1. Rõ ràng:

$x\le x',\quad y\le y' \Rightarrow g(x,y)$

$=\dfrac{x+y}{2}\le\dfrac{x'+y'}{2}=g(x',y')$.

Vậy điều kiện i được thỏa mãn.

Tiếp theo ta có:

$$g(y,f(x,y))=\frac{y+f(x,y)}{2}=\frac{y+2x-y}{2}=x$$

với mọi $x,y\in$ **R**.

Vậy điều kiện ii được thỏa mãn.

Cuối cùng, nếu x,A là các số thực thì:

$$x\le g(x,A)=\frac{x+A}{2}\Leftrightarrow x\le A$$

$$x\ge g(x,A)=\frac{x+A}{2}\Leftrightarrow x\ge A$$

Do đó điều kiện iii cũng được thỏa mãn. Như vậy các hàm f,g đưa ra thỏa mãn tất cả các điều kiện của định lý 2.1 nên áp dụng định lý với $k=1$ ta nhận được khẳng định của bài toán.

Nhận xét:

- Khẳng định của bài toán vẫn đúng nếu giả thiết đã cho được thay bằng giả thiết $\lim_{n\to\infty}(2x_{n+k}-x_n)=\ell\in$ **R** với k là số nguyên dương tùy ý cố định.

- Từ khẳng định của bài toán trong ví dụ 1 suy ra khẳng định sau (được đưa vào nhiều sách bài tập môn giải tích, chẳng hạn xem ([2], bài toán 1.18 chương 2)):

Nếu $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n)=0$ thì $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

Thật vậy,

$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n)=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}(2x_{n+1}-x_n)=0$, do đó $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ theo khẳng định trong ví dụ 1.

Ví dụ 2: Cho dãy số dương $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}^3}{x_n}=\alpha\in[0,+\infty)$.

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\alpha}$.

Giải. Trước hết xét trường hợp $\alpha=0$.

Hàm $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^3}{y}}$ xác định trên D = $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

Đặt $r(n)=\sqrt{\dfrac{x_{n+1}^3}{x_n}}$ thì dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là nghiệm của phương trình sai phân $f(x_{n+1},x_n)=r(n)$, trong đó $\lim_{n\to\infty}r(n)=0$. Hàm $g(x,y)=\sqrt[3]{xy^2}$ liên tục trên **R²**.

Ta kiểm tra các điều kiện i, ii, iii đối với hàm g trong định lý 2.1:

i) Khi $0<x\le x',\ 0<y\le y'$ rõ ràng ta có $g(x,y)=\sqrt[3]{xy^2}\le\sqrt[3]{x'y'^2}=g(x',y')$. Vậy điều kiện i được thực hiện.

ii) $g(y,f(x,y))=\sqrt[3]{y\dfrac{x^3}{y}}=x$ $(\forall x,y\in(0,+\infty))$. Vậy điều kiện ii được thực hiện.

iii) Vì $\alpha=0$, theo nhận xét sau chứng minh định lý 2.1 chỉ cần kiểm tra $g(A,A)=A$ và quan hệ tương đương $x\le g(x,A)\Leftrightarrow x\le A$ với $x,A\in[0,+\infty)$. Khi $x,A\in[0,+\infty)$ rõ ràng ta có:

$g(A,A)=\sqrt[3]{A.A^2}=A$

và $x\le g(x,A)\Leftrightarrow x\le\sqrt[3]{xA^2}\Leftrightarrow x\le A$.

Vậy điều kiện iii được thực hiện và khẳng định được chứng minh cho trường hợp $\alpha=0$.

Bây giờ giả sử $\alpha>0$. Đặt $y_n=\ln x_n$ thì $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}^3}{x_n}=\alpha>0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}(3y_{n+1}-y_n)=\ln\alpha$. Xét hàm $f(x,y)=\dfrac{3x-y}{2}$ xác định trên $(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$

và hàm $g(x,y)=\dfrac{x+2y}{3}$.

Đặt $r(n)=\dfrac{3y_{n+1}-y_n}{2}$ ta có

$$\lim_{n\to\infty} r(n)=M=\frac{\ln\alpha}{2}$$

và dãy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ là nghiệm của phương trình sai phân $f(y_{n+1},y_n)=r(n)$ (*). Tương tự như trong ví dụ 1 dễ kiểm chứng rằng các hàm f,g thỏa mãn tất cả các điều kiện của định lý 2.1. Vậy theo kết luận của định lý, nghiệm $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ của phương trình (*) thỏa mãn

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\frac{\ln\alpha}{2} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{\alpha}\ .$$

Khẳng định của bài toán trên vẫn đúng nếu giả thiết $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}^3}{x_n}=\alpha\in[0,+\infty)$ được thay bằng giả thiết $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+k}^3}{x_n}=\alpha\in[0,+\infty)$ với k là số nguyên dương cố định tùy ý.

Từ định lý 2.1 có thể suy ra hệ quả sau:

Hệ quả 2.2: *Nếu k là số thực khác 0 thì không tồn tại hàm hai biến liên tục g xác định trên toàn* ***R²*** *có các tính chất sau:*

i. $g(x,y)\le g(x',y')$ *khi* $x\le x'$ *và* $y\le y'$;

ii. $g(y,x+ky)=x$ *với mọi* $x,y\in(-\infty,+\infty)$;

iii. $x\le g(x,A)\Leftrightarrow x\le A$ *và* $x\ge g(x,A)\Leftrightarrow x\ge A$ *với* $x,A\in(-\infty,+\infty)$.

Chứng minh.

Phương trình $x_{n+1}+kx_n=\dfrac{n+1}{n}$ (**) rõ ràng có nghiệm là một dãy nào đó $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bằng công thức truy toán $x_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}-kx_n$.

Nếu tồn tại hàm hai biến liên tục g xác định trên toàn **R²** có các tính chất nêu trong hệ quả 2.2 thì với $f(x,y)=x+ky, r(n)=\dfrac{n+1}{n}$ tất cả các điều kiện của định lý 2.1 được thỏa mãn. Do đó dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$.

Cho n dần tới vô cực trong đẳng thức (**) ta đi đến mâu thuẫn $1+k=1$, vì k khác 0.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Teodora-Liliana T. Rădulescu, Vicenţiu D. Rădulescu, Titu Andreescu. Problems in real analysis: Advanced calculus on real axis. Springer 2009.

[2]. Б.М.Макаров, М.Г.Голузина, А.А.Лодкин, А.Н.Подкорытов. Избранные задачи по вещественному анализу. Москва “Наука”, 1992.

Ngày nhận bài: 03/3/2016
Ngày phản biện: 11/3/2016
Ngày duyệt đăng: 14/3/2016

PHƯƠNG PHÁP TÍNH TỔNG CỦA MỘT LỚP CHUỖI SỐ CÓ SỐ HẠNG TỔNG QUÁT u_n LÀ HÀM HỮU TỈ CỦA n

A METHOD TO SUM SERIES WITH GENERAL TERMS u_n BEING A RATIONAL FUNCTION OF n

PHẠM VĂN MINH

Bộ môn Toán, Trường đại học Hàng Hải Việt Nam

Tóm tắt

Bài báo này đưa ra cách tính tổng của lớp chuỗi số dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ ,$$